**Préparation à l'agrégation interne de mathématiques - Année 2013-2014**
Algèbre bilinéaire, espaces euclidiens - 23 octobre 2013

# 1 Formes bilinéaires

Il y a énormément de références possibles (usuelles : [Mon06], [Gri02] et [Gou94]).

Le premier exercice est une « question de cours » et permet d'investir la bilinéarité, la symétrie et la positivité d'une forme.

**Exercice 0.** *Sur un* $\mathbf{R}$*-espace vectoriel* $E$*, on considère une forme bilinéaire symétrique positive* $\varphi$ *de forme quadratique associée* $q$ *(c'est-à dire* $q(x) = \varphi(x, x)$*).*

1. *Démontrer les inégalités de Cauchy-Schwarz et de Minkowsky : pour tous* $x$ *et* $y$ *dans* $E$*,*
   (a) $(\varphi(x, y))^2 \leqslant q(x)q(y)$
   (b) $\sqrt{q(x + y)} \leqslant \sqrt{q(x)} + \sqrt{q(y)}$
2. *On suppose de plus* $\varphi$ *définie positive. Traiter les cas d'égalité.*

**Réduction de Gauss des formes quadratiques en somme et différence de carrés.**
Le résultat théorique :

**Théorème 1.** *Si* $q$ *est une forme quadratique sur* $\mathbf{R}^n$*, il existe* $n$ *formes linéaires* $\ell_1, \ldots, \ell_n$ *sur* $E$*, linéairement indépendantes et* $n$ *réels* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ *tels que :*

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(\ell_i(x)\right)^2 .$$

**Remarques 1.**
1. *Il n'y pas unicité des formes linéaires* $\ell_1, \ldots, \ell_n$*.*
2. *Certains coefficients* $\alpha_i$ *peuvent être nuls, les formes linéaires* $\ell_i$ *correspondantes sont alors sans intérêt.*
3. *La forme polaire ainsi qu'une base* $q$*-orthogonale de* $E$ *se déduisent de cette décomposition.*
4. *Le* rang *de* $q$ *est le nombre de coefficients* $\alpha_i$ *non nuls et la* signature *se déduit de la distribution de signes de ces coefficients* $\alpha_i$*.*

Le but de l'exercice suivant est l'application de cette décomposition sur un exemple précis, et de voir quelles informations peuvent en être déduites.

**Exercice 1.** *On considère la forme quadratique*

$$q : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R} : (x, y, z) \longmapsto x^2 + 2y^2 - z^2 + 2xy + 2xz.$$

1. *Justifier que* $q$ *n'est ni positive, ni négative.*
2. *Décomposer* $q$ *en somme et différence de carrés (de formes linéaires indépendantes).*
3. *En déduire :*
   (a) *la forme polaire* $\varphi$ *de* $q$ *;*
   (b) *le rang et la signature de* $q$ *;*
   (c) *une base* $q$*-orthogonale de* $\mathbf{R}^3$ *;*
   (d) *la «nature» des ensembles de niveau* $q^{-1}(\{0\})$*,* $q^{-1}(\{1\})$ *et* $q^{-1}(\{-1\})$*.*

D'autres exemples sont proposés dans les références. Il y a deux cas possibles lors de l'application de la méthode de Gauss, selon la nullité ou pas des termes « diagonaux ».

**Exercice 2.** *On travaille sur un espace vectoriel réel $E$ de dimension $n \geqslant 2$.*

1. *Justifier qu'une forme quadratique de signature $(1,1)$ est le produit de deux formes linéaires sur $E$, linéairement indépendantes.*
2. *Décrire, à l'aide de ces deux formes linéaires, le* noyau *de $q$ (le noyau de $\varphi(x,.)$) ainsi que l'ensemble des vecteurs* isotropes *(vérifiant $q(x) = 0$).*

## 2 Espaces euclidiens

**Exercice 3.** *Si $P$ et $Q$ sont deux polynômes à coefficients réels, on définit*

$$\langle P|Q\rangle = \int_0^1 P'(t)Q'(t)dt.$$

*Pour tout entier naturel non nul $n$, on définit*

$$E = \left\{ P \in \mathbf{R}_n[X] : \int_0^1 P(t)dt = 0 \right\}.$$

1. *Vérifier que $\langle .|. \rangle$ est une forme bilinéaire symétrique positive sur $\mathbf{R}[X]$. Est-elle définie positive ?*
2. *Démontrer que $E$ muni de $\langle .|. \rangle$ est un espace euclidien.*
3. *Déterminer une base orthonormale de $(E, \langle .|. \rangle)$ lorsque $n$ est égal à 3.*
   *Indication : Déterminer une base de $E$ puis appliquer l'orthonormalisation de Schmidt.*

**Exercice 4.** *Sur $E = \mathbf{R}_2[X]$, on considère l'application $\varphi$ définie par*

$$\varphi(P,Q) = \sum_{k=0}^{2} P(k)Q(k).$$

1. *Montrer que l'application $\varphi$ est un produit scalaire sur $E$.*
2. *Déterminer une base orthonormale (relativement à $\varphi$) du sous-espace $F = \{P \in E : P(0) = 0\}$.*
3. *Déterminer une base de $F^\perp$.*

**Exercice 5.**

1. *Vérifier que l'application $(A,B) \longmapsto \operatorname{tr}\left({}^tAB\right)$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.*
   *On note $\|.\|$ la norme associée à ce produit scalaire.*
2. *Exprimer la norme $\|A\|$ d'une matrice $A = (a_{ij})$ en fonction de ses coefficients.*
3. *Vérifier que les «matrices indicatrices» $E_{ij}$ (coefficients tous nuls sauf celui d'indice $(i,j)$ égal à $1$) forment une base orthonormée de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.*
4. *Vérifier qu'une matrice orthogonale est de norme $\sqrt{n}$.*
5. *Démontrer que, pour toute matrice symétrique $A = (a_{ij})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ de valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, on a l'égalité*

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_i^2 = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2.$$

   *Indication : Une matrice symétrique réelle est ...*

## 3 Endomorphismes d'un espace euclidien

**Exercice 6.** ***(projecteur orthogonal et moindres carrés)***

*Soit $p$ un endomorphisme d'un espace vectoriel $E$*

1. *Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes*
   $(i)$ $p \circ p = p$
   $(ii)$ $E = \ker(p) \oplus \ker(p - id)$
   *Un endomorphisme vérifiant ces propriétés est le* ***projecteur*** *sur le sous-espace* $\ker(p - id) = \operatorname{im} p$ *parallèlement au sous-espace* $\ker(p)$.

*Dans la suite, on considère un espace euclidien $(E, \langle .,. \rangle)$ muni de la norme associée $\|.\|$.*

2. *Soit $p$ un projecteur de $E$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes*
   $(i)$ *$p$ est un endomorphisme symétrique*
   $(ii)$ $\ker p = (\operatorname{im} p)^{\perp}$
   *Indication : Pour $(ii) \Rightarrow (i)$ : calculer $\langle p(x), y \rangle$ (resp. $\langle x, p(y) \rangle$) en décomposant $y$ (resp. $x$).*
   *On parle alors de* ***projecteur orthogonal*** *(sur le sous-espace $F = \operatorname{im} p$, parallèlement à $F^{\perp}$).*
3. *Exemple : si $v$ est un vecteur non nul de $E$, décrire l'application $p$ définie pour tout vecteur $x$ de $E$ par*
$$p(x) = x - \frac{\langle x, v \rangle}{\|v\|^2} v.$$
4. *Soit $p$ le projecteur orthogonal sur un sous-espace vectoriel $F$ de $E$. Vérifier que, pour tout $x$ dans $E$ :*
$$\|p(x) - x\| = \inf_{y \in F} \|y - x\| = \min_{y \in F} \|y - x\| = \inf_{x' \in E} \|p(x') - x\| = \min_{x' \in E} \|p(x') - x\|.$$
   *Indication : Utiliser le théorème de Pythagore.*
5. ***Application : détermination de la droite de régression linéaire d'un nuage de points.*** *On considère $n$ points $\{A_i(x_i, y_i)\}_{i=1,\dots,n}$ dans $\mathbf{R}^2$ et on recherche une droite de $\mathbf{R}^2$ d'équation $y = ax + b$ qui soit «la plus proche possible» des points $A_i$. On cherche à minimiser la distribution des écarts $y_i - (ax_i + b)$ au sens suivant : trouver $a$ et $b$ afin de minimiser la quantité*
$$\sum_{i=1}^{n} \left(y_i - (ax_i + b)\right)^2.$$
   *On considère les vecteurs* $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ ; $\underline{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ *et* $\underline{1} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ *de $\mathbf{R}^n$ et $f$ l'application linéaire de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}^n$ définie par $f(a, b) = a\underline{x} + b\underline{1}$.*
   (a) *Montrer que le problème consiste à déterminer $(a, b)$ tel que $\|f(a, b) - \underline{y}\|$ soit minimal.*
   (b) *Montrer que le couple $(a, b)$ recherché vérifie*
$$\left\{ \begin{array}{rcl} a\langle \underline{x}, \underline{x} \rangle + b\langle \underline{1}, \underline{x} \rangle & = & \langle \underline{x}, \underline{y} \rangle \\ a\langle \underline{1}, \underline{x} \rangle + b\langle \underline{1}, \underline{1} \rangle & = & \langle \underline{1}, \underline{y} \rangle \end{array} \right.$$
   *Indication : Utiliser le projecteur orthogonal $p$ de $\mathbf{R}^n$ sur $\operatorname{im} f$ et la famille génératrice $\{\underline{x}, \underline{1}\}$ de $\operatorname{im} f$.*
   (c) *Résoudre le système précédent puis vérifier que*
$$a = \frac{n \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)}{n \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} \quad \text{et} \quad b = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)}{n \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$$
   (d) *Vérifier (avec quelques points) qu'une calculatrice ou un tableur fournit la même droite de régression linéaire.*

**Exercice 7.** ***(matrices orthogonales, unitaires)***

1. *Montrer qu'une matrice orthogonale (resp. unitaire) admet pour déterminant* $\pm 1$ *(resp. un nombre complexe de module* $1$*).*
2. *Montrer que toute valeur propre d'une matrice orthogonale (resp. unitaire) est de module* $1$.
3. *Montrer que* $1$ *est valeur propre de toute matrice de* $\mathrm{SO}(3, \mathbf{R})$. *Que représente l'espace propre associé (discuter selon la dimension) ?*

**Exercice 8.** ***(la dimension 2)*** *L'espace* $\mathbf{R}^2$ *est muni de la structure euclidienne canonique.*

1. *Démontrer que les matrices de* $\mathrm{SO}(2, \mathbf{R})$ *sont les matrices de la forme* $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.
2. *Vérifier que le groupe* $\mathrm{SO}(2, \mathbf{R})$ *est commutatif. Est-ce le cas du groupe* $\mathrm{O}(2, \mathbf{R})$ *?*
3. *Décomposer l'endomorphisme défini par la matrice* $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$ *en produit de deux réflexions dont on donnera les matrices dans le base canonique.*

**Exercice 9.** ***(la dimension 3)*** *L'espace* $\mathbf{R}^3$ *est muni de la structure euclidienne canonique.*

1. *Décrire l'endomorphisme défini par la matrice* $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.
2. *Déterminer la matrice de la symétrie orthogonale par rapport au plan d'équation* $x - 2y + 2z = 0$.
   *Indication : Cette symétrie s'écrit* $2p - id$ *avec* $p$ *un certain projecteur ortogonal.*
3. *Déterminer la matrice de la rotation d'angle* $\frac{2\pi}{3}$ *autour de l'axe dirigé et orienté par le vecteur* $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

# Références


[Gou94] Xavier Gourdon. Algèbre. Les maths en tête. Ellipses, Paris, 1994.

[Gri02] Joseph Grifone. Algèbre linéaire. Cépaduès-Éditions, Toulouse, 2002.

[Mon06] Jean-Marie Monier. Algèbre MPSI, Cours, méthodes et exercices corrigés, 4eédition. J'intègre. Dunod, Paris, 2006.