Fractions continues

- Considérons cet échafaudage provenant de ce que nous avons vu sur √15 / 5 = √(3/5).

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cdots}}}}}$$

Est-ce que ça a un sens ?
Comparer avec $\pi = 3{,}14159265\ldots$ ou 1/11 = 0,090909…..

- Si on tronque de plus en plus loin, que se passe-t-il ?

$$\frac{1}{1}=\boxed{1}$$

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3}}=\boxed{\frac{3}{4}}$$

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2}}}=\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{7}}=\boxed{\frac{7}{9}}$$

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3}}}}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{3}{7}}}=\cfrac{1}{1+\cfrac{7}{24}}=\boxed{\frac{24}{31}}$$

- Essayons de retrouver la limite :

$$x=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cdots}}}\qquad \frac{1}{x}=1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cdots}}}\qquad \frac{1}{x}-1=\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cdots}}}=y$$

On remarque alors que :

$$y=\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cdots}}}}=\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\left(\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cdots}}\right)}}=\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+y}}=\frac{2+y}{3y+7}$$

Donc $y\,(3y+7)=2+y$ soit $3y^2+6y-2=0$. Remplaçons y par x :

$$3\left(\frac{1}{x}-1\right)^2+6\left(\frac{1}{x}-1\right)-2=0 \quad\text{soit}\quad \left(\frac{3}{x^2}-\cancel{\frac{6}{x}}+3\right)+\left(\cancel{\frac{6}{x}}-6\right)-2=0 \quad\text{ou}\quad \frac{3}{x^2}-5=0$$

Finalement $x^2=\frac{3}{5}$ soit $\boxed{x=\sqrt{\frac{3}{5}}=\frac{\sqrt{15}}{5}}$