Préparation à l'agrégation interne de mathématiques - Année 2012-2013
Fonctions réelles d'une variable réelle
Exercices - 19 septembre 2012

Nous poursuivons les exercices sur les fonctions réelles ; en particulier des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ (essentiellement l'item **9.4 Dérivabilité** du programme officiel).

1 Régularité d'une fonction

Exercice 1.

1. *Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle ouvert I. On suppose que f vérifie pour tout x dans I :*
$$f(x) = 0 \Longrightarrow f'(x) = 0.$$
Démontrer que la fonction $g = |f|$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle I.
2. *Déterminer la classe et les dérivées successives de $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} : x \longmapsto |x^3|$.*

Exercice 2. **(Avec la formule de Leibniz)**

Pour tout entier n strictement positif, on considère la fonction
$$g_n :]0; +\infty[\longrightarrow \mathbf{R} : t \longmapsto t^{n-1} e^{\frac{1}{t}}.$$
Déterminer g_1' et g_2'' puis déterminer la dérivée n-ième de g_n.

Exercice 3. *Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par*
$$f : x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

1. *Simplifier l'expression $(1+x^2)f'(x) + xf(x)$ puis en déduire, à l'aide de la formule de Leibniz, que, pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout réel x :*
$$(1+x^2)f^{(n+1)}(x) + (2n+1)xf^{(n)}(x) + n^2 f^{(n-1)}(x) = 0.$$
2. *Déterminer tous les nombres $f^{(n)}(0)$.*

Exercice 4. *Soit f une fonction réelle de classe $\mathcal{C}^2$ sur un intervalle $[a; b]$ de $\mathbf{R}$ (avec $a < b$).*

On suppose que $f(a) = f'(a)$ et $f(b) = f'(b)$.

1. *Démontrer qu'il existe un réel c de l'intervalle $]a; b[$ tel que $f(c) = f''(c)$.*
2. *Écrire un énoncé qui généralise la situation à une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ et faisant intervenir les dérivées successives de f en a et b.*

2 Développements limités

Exercice 5. *Soit f une fonction à valeurs réelles de classe $\mathcal{C}^2$ sur un voisinage de 0.*

On suppose que $f(0) = 0$. Déterminer la limite de $\frac{f(x)+f(-x)}{x^2}$ lorsque x tend vers 0.

Exercice 6. *On pose* $f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$. *Déterminer l'ensemble de définition ainsi que les limites de la fonction* f.

Exercice 7. *Pour quelle(s) valeur(s) des réels* a *et* b *la fonction*

$$g : x \longmapsto \frac{1}{1+ax+bx^2} - e^{-x}$$

est-elle négligeable en 0 *devant* x *? devant* x^2 *? devant* x^3 *?*

Exercice 8. *Calculer le développement limité à l'ordre 2 en 0 de* $x \longmapsto \frac{\ln(1+x)}{\ln(1-x)}$.

Exercice 9. *Déterminer la limite suivante :*

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^x - x}{1 - x + \ln x}.$$

3 Convexité

Exercice 10. *Soit* f *une fonction convexe sur* $[A;+\infty[$.

1. *On suppose que* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. *Démontrer que* f *est positive sur* $[A;+\infty[$.
2. *On suppose que la courbe représentative* $\mathcal{C}_f$ *de* f *admet une asymptote (horizontale ou oblique)* $\mathcal{D}$ *en* $+\infty$. *Démontrer que la courbe* $\mathcal{C}_f$ *est située au-dessus de la droite* $\mathcal{D}$.

Exercice 11. Inégalité de Jensen

1. *Soient* f *une fonction convexe sur un intervalle* I, $x_1, \ldots, x_n$ *des réels de* I *et* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *des réels positifs de somme* 1. *Démontrer l'inégalité*
$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i).$$
2. *Un parcours est composé de* n *étapes de longueurs* ℓ_i, *chacune parcourue à une vitesse moyenne* v_i *(strictement positive).*
Démontrer que la vitesse moyenne sur la totalité du parcours est inférieure à la moyenne pondérée $\sum\limits_{i=1}^{i=n} \ell_i v_i / \sum\limits_{i=1}^{i=n} \ell_i$ *des vitesses.*

Exercice 12. Convexité de fonctions polynomiales

1. *Étudier la convexité et la concavité sur* $\mathbf{R}$ *d'une fonction polynomiale de degré* 3.
2. *Déterminer une condition nécessaire et suffisante simple sur les coefficients pour qu'une fonction polynomiale de degré* 4 *soit convexe ou concave sur* $\mathbf{R}$.

4 Résolution d'une équation $f(x) = 0$

On s'intéresse à la résolution approchée de l'équation $f(x) = 0$.

Exercice 13. *On supposera ici que f est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un intervalle $[a;b]$ (avec $a < b$).*
On suppose de plus que $f(a)f(b) < 0$ et f' ne s'annule pas sur $[a;b]$.

1. *Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution r sur $]a;b[$.*
2. *Construction d'une suite récurrente convergeant vers r.*
   Soit g une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et ne s'annulant pas sur $[a;b]$. On définit la fonction φ par $\varphi(t) = t - \frac{f(t)}{g(t)}$ et, pour tout réel c de $[a;b]$, la suite u^c (ou u) par $\begin{cases} u_0 = c \\ u_{n+1} = \varphi(u_n) \end{cases}$
   Justifier que r est l'unique point fixe de la fonction φ et que $\varphi'(r) = 1 - \frac{f'(r)}{g(r)}$.
3. *On suppose ici que $|\varphi'(r)| < 1$ (r est point fixe attractif).*
   (a) *Justifier qu'il existe un réel $\eta > 0$ tel que, pour tout réel c dans l'intervalle $[r-\eta; r+\eta]$, la suite u^c est bien définie et converge vers r.*
   Indication : Considérer k tel que $|\varphi'(r)| < k < 1$.
   (b) *Démontrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1} - r}{u_n - r} = \varphi'(r)$.*
4. *On suppose ici que φ est de classe $\mathcal{C}^2$ et que $\varphi'(r) = 0$.*
   (a) *Justifier que, pour tout réel t de l'intervalle $]a;b[$, il existe un réel ξ compris entre r et t tel que*
   $$\varphi(t) - r = \varphi''(\xi)\frac{(t-r)^2}{2}.$$
   (b) *En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1} - r}{(u_n - r)^2} = \frac{\varphi''(r)}{2}$.*
5. ***La méthode de Newton.*** *On choisit ici $g(t) = f'(t)$. Ainsi $\varphi'(r) = 0$.*
   (a) *Vérifier que $\varphi(t)$ est l'abscisse du point d'intersection de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ en t avec l'axe des abscisses.*
   (b) *En appliquant la formule de Taylor-Lagrange à f, démontrer qu'il existe un réel ξ compris entre r et t tel que*
   $$\varphi(t) - r = \frac{(t-r)^2}{2f'(t)} f''(\xi).$$
   (c) *On pose $m = \inf_{[a;b]} |f'(t)|$ et $M = \sup_{[a;b]} |f''(t)|$. Justifier, pour tout réel c suffisament proche de r, que*
   $$\forall n \in \mathbf{N}, \qquad |u_{n+1} - r| \leqslant \frac{M}{2m} |u_n - r|^2$$
   puis que
   $$\forall n \in \mathbf{N}, \qquad \frac{M}{2m} |u_n - r| \leqslant \left(\frac{M}{2m}|c - r|\right)^{2^n}.$$