1 Maxima et paraboles

1. Dans une feuille wxMaxima, entrer et valider une à une les lignes suivantes :

```
f(x):=a*x^2+b*x+c
solve([f(0)=-7,f(1)=-1,f(2)=9],[a,b,c])
```

2. Noter les résultats.
3. Comprendre la signification des commandes exécutées en se servant éventuellement de l'aide du logiciel.
4. Interpréter le résultat en complètant la phrase suivante : « Il existe une unique parabole passant par les points ..., cette parabole représente la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dots$ »

$\boxed{\text{Appel}}$

2 Suite définie par une relation de récurrence

2.1 Une première suite

On définit une suite u par :

$$\begin{cases} u_0 = -7 \\ \text{Pour tout entier } n \geqslant 0,\ u_{n+1} = u_n + 4n + 6 \end{cases}$$

1. Faire une feuille de tableur qui devra afficher les premiers termes de la suite. Puis faire une représentation graphique des premiers termes de la suite par un « nuage de points ».
2. Faire alors une conjecture sur l'expression de u_n en fonction de n.
3. Contrôler la conjecture à l'aide d'une colonne supplémentaire sur la feuille de tableur.

$\boxed{\text{Appel}}$

2.2 Une autre suite

En procèdant de façon analogue, faire une conjecture sur l'expression de u_n en fonction de n avec la suite u définie par :

$$\text{Pour tout entier } n \geqslant 1,\ u_n = \frac{3}{n} \sum_{k=1}^{n} k\,(k-1)$$

$\boxed{\text{Appel}}$

Contrainte : on s'interdira l'utilisation de la fonction SOMME du tableur.

3 DM pour ...

1. Écrire les réponses apportées au paragraphe 1 (paraboles).
2. Écrire les conjectures faites pour chacune des deux suites.
3. Démontrer ces conjectures.

Corrigé

1 Paraboles et Maxima

```
f(x):=a*x^2+b*x+c;
```

On définit ainsi une fonction f par son expression $f(x) = ax^2 + bx + c$.

```
solve([f(0)=-7,f(1)=-1,f(2)=9],[a,b,c]);
```

On commande ainsi la résolution du système linéaire d'inconnue $(a; b; c)$:

$$\begin{cases} c = -7 \\ a + b + c = -1 \\ 4a + 2b + c = 9 \end{cases}$$

Le résultat $(a; b; c) = (2, 4, -7)$ (très simple à obtenir sans logiciel de calcul formel) permet d'écrire : « Il existe une unique parabole passant par les points $A\,(0; -7)$, $B\,(1; -1)$ et $C\,(2; 9)$, cette parabole représente la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 + 4x - 7$. »

2 Conjectures avec le tableur

2.1 $u_0 = -7$ et pour tout entier $n \geqslant 0,\ u_{n+1} = u_n + 4n + 6$

1. Les formules de la feuille de calcul :

	A	B	C	D	E
1	Indices n	Termes u_n			
2	0	-7			
3	1	=B2+4∗A2+6			
4	2	=B3+4∗A3+6			
5	3	=B4+4∗A4+6			
⋮	⋮				

Les premiers résultats sont les suivants :

	A	B	C	D	E
1	Indices n	Termes u_n			
2	0	-7			
3	1	-1			
4	2	9			
5	3	23			
6	4	41			

2. Il semble que les points obtenus soient placés sur une parabole. Cela permet de conjecturer une expression de la forme $u_n = an^2 + bn + c$ où a, b et c restent à déterminer.
   Les résultats obtenus dans la partie 1 (Maxima) permettent de faire la conjecture suivante :

   $$\text{Pour tout entier naturel } n,\ u_n = 2n^2 + 4n - 7$$

3. Pour tenter de renforcer la plausibilité de cette formule, on peut compléter la feuille de tableur de la façon suivante :

	A	B	C	D	E
1	Indices n	Termes u_n	Confirmation ?		
2	0	-7	=2∗A2^2+4∗A2−7		
3	1	=B2+4∗A2+6	=2∗A3^2+4∗A3−7		
4	2	=B3+4∗A3+6	=2∗A4^2+4∗A4−7		
5	3	=B4+4∗A4+6	=2∗A5^2+4∗A5−7		
⋮	⋮				

Tous les résultats, même sur une longue colonne, coïncident.

2.2 Pour $n \geqslant 1,\ u_n = \dfrac{3}{n}\sum_{k=1}^{n} k\,(k-1)$

La feuille de calcul peut par exemple contenir les formules suivantes :

	A	B	C	D	E
1	Indices n	produit $k(k-1)$	$\sum_{k=1}^{n} k(k-1)$	u_n	n^2-1
2	0				
3	1	=A3∗A2	=SOMME(B\$3:B3)	=3/A3∗C3	=A3^2−1
4	2	=A4∗A3	=SOMME(B\$3:B4)	=3/A4∗C4	=A4^2−1
5	3	=A5∗A4	=SOMME(B\$3:B5)	=3/A5∗C5	=A5^2−1
6	4	=A6∗A5	=SOMME(B\$3:B6)	=3/A6∗C6	=A6^2−1

Avec la contrainte imposée, la colonne C peut s'écrire ainsi :

	A	B	C	D	E
1	Indices n	produit $k(k-1)$	$\sum_{k=1}^{n} k(k-1)$	u_n	n^2-1
2	0				
3	1	=A3∗A2	=B3	=3/A3∗C3	=A3^2−1
4	2	=A4∗A3	=B4+C3	=3/A4∗C4	=A4^2−1
5	3	=A5∗A4	=B5+C4	=3/A5∗C5	=A5^2−1
6	4	=A6∗A5	=B6+C5	=3/A6∗C6	=A6^2−1

Ces formules demandent moins de calcul au logiciel en utilisant l'égalité suivante :

$$\sum_{k=1}^{n} k(k-1) = \left(\sum_{k=1}^{n-1} k(k-1)\right) + n(n-1)$$

On remarquera de plus dans la partie démonstration, que cette écriture est l'une des clefs de l'étape d'hérédité. Elle met en effet en évidence le fait que la suite (S_n) définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par $S_n = \sum_{k=1}^{n} k(k-1)$ est une suite faisant naturellement intervenir une relation de récurrence :

$$S_n = S_{n-1} + n(n-1)$$

On obtient les premiers résultats suivants :

	A	B	C	D	E
1	Indices n	produit $k(k-1)$	$\sum_{k=1}^{n} k(k-1)$	u_n	n^2-1
2	0				
3	1	0	0	0	0
4	2	2	2	3	3
5	3	6	8	8	8
6	4	12	20	15	15

Les points de la représentation graphique semblent là aussi se trouver sur une parabole. Dans le logiciel Maxima, on entre :

```
f(x):=a*x^2+b*x+c
solve([f(1)=0,f(2)=3,f(3)=8],[a,b,c])
```

et on obtient :

```
[[a=1,b=0,c=-1]]
```

ce qui nous mène à la conjecture :

$$\text{Pour tout entier naturel } n \geqslant 1,\ u_n = n^2 - 1$$

Ce qu'on aurait pu remarquer directement en observant les résultats (qui sont, à une unité près, les carrés des entiers).

3 Démonstrations

3.1 $u_0 = -7$ et pour tout entier $n \geqslant 0,\ u_{n+1} = u_n + 4n + 6$

Posons pour $n \in \mathbb{N}$: $v_n = 2n^2 + 4n - 7$.
Dans Maxima :

```
v(n):=2*n^2+4*n-7;
expand(v(n+1)-v(n));
```

Réponse de Maxima, facile à vérifier avec papier et crayon : $4\,n + 6$
Pour la suite v, nous avons donc :

$$\begin{cases} v_0 = -7 \\ v_{n+1} = v_n + 4\,n + 6 \end{cases}$$

La suite v est donc égale à la suite u.

Démonstration.

1. Amorce.
   Nous avons $u_0 = v_0$.
2. Hérédité.
   Soit p un entier pour lequel on aurait $u_p = v_p$.
   Alors
   $$\begin{aligned} u_{p+1} &= u_p + 4p + 6 \\ &= v_p + 4p + 6 \quad \text{d'après l'hypothèse de récurrence} \\ &= v_{p+1} \end{aligned}$$
3. Conclusion.
   Les deux étapes précédentes et le principe de récurrence nous permettent ainsi l'affirmation :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_n$$

3.2 Pour tout entier $n \geqslant 1,\ u_n = \dfrac{3}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\,(k-1)$

Reprenons les notations introduites plus haut :
pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit S_n par $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k-1)$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, nous avons :

$$S_{n+1} = S_n + n(n+1)$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{3}{n} S_n$ et :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{3}{n+1} S_{n+1} \\ &= \frac{3}{n+1}\left(S_n + n(n+1)\right) \\ &= \frac{3}{n+1}\left(\frac{n}{3} u_n + n(n+1)\right) \\ &= \frac{n}{n+1} u_n + 3n \end{aligned}$$

Posons maintenant pour $n \in \mathbb{N}^*$: $v_n = n^2 - 1$.
Dans Maxima :

```
v(n):=n^2-1;
ratsimp(v(n+1)-n/(n+1)*v(n));
```

La réponse ne se fait pas attendre et est facilement vérifiable « à la main » : $3\,n$.
Pour la suite v, nous avons donc :

$$\begin{cases} v_1 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}^* \ v_{n+1} = \dfrac{n}{n+1} v_n + 3n \end{cases}$$

et pour la suite u :

$$\begin{cases} u_1 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}^* \ u_{n+1} = \dfrac{n}{n+1} u_n + 3n \end{cases}$$

Avec une rédaction analogue au paragraphe précédent, nous pouvons donc établir que les suites u et v sont égales.

4 Autres rédactions des preuves

4.1 $u_0 = -7$ et pour tout entier $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = u_n + 4n + 6$

On cherche à démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n, on a : $u_n = 2n^2 + 4n - 7$.

- Amorce.
  On a $u_0 = -7$ et $2 \times 0^2 + 4 \times 0 - 7 = -7$. L'égalité entre u_n et $2n^2 + 4n - 7$ est donc vraie pour $n = 0$.
- Hérédité.
  Soit p un entier naturel pour lequel on aurait $u_p = 2p^2 + 4p - 7$ (HR).

  $$\begin{aligned} u_{p+1} &= u_p + 4p + 6 \\ &= \left(2p^2 + 4p - 7\right) + 4p + 6 \text{ en utilisant HR} \\ &= 2p^2 + 8p - 1 \end{aligned}$$

  Et le développement de l'expression $2\,(p+1)^2 + 4\,(p+1) - 7$ donne :

  $$\begin{aligned} 2\,(p+1)^2 + 4\,(p+1) - 7 &= \left(2p^2 + 4p + 2\right) + 4p + 4 - 7 \\ &= 2p^2 + 8p - 1 \end{aligned}$$

  L'hérédité est ainsi établie.
- Le principe de récurrence nous permet maintenant d'affirmer que pour tout entier naturel n, on a : $u_n = 2n^2 + 4n - 7$.

4.2 $u_0 = -7$ et pour tout entier $n \geqslant 0,\ u_{n+1} = u_n + 4n + 6$

On cherche à démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n, on a : $u_n = 2n^2 + 4n - 7$.

- Amorce.
  On a $u_0 = -7$ et $2 \times 0^2 + 4 \times 0 - 7 = -7$. L'égalité entre u_n et $2n^2 + 4n - 7$ est donc vraie pour $n = 0$.
- Hérédité.
  Soit p un entier naturel pour lequel on aurait $u_p = 2p^2 + 4p - 7$ (HR).

$$\begin{aligned} u_{p+1} &= u_p + 4p + 6 \\ &= \left(2p^2 + 4p - 7\right) + 4p + 6 \text{ en utilisant HR} \\ &= 2p^2 + 8p - 1 \end{aligned}$$

  Et le développement de l'expression $2\,(p+1)^2 + 4\,(p+1) - 7$ donne :

$$\begin{aligned} 2\,(p+1)^2 + 4\,(p+1) - 7 &= \left(2p^2 + 4p + 2\right) + 4p + 4 - 7 \\ &= 2p^2 + 8p - 1 \end{aligned}$$

  L'hérédité est ainsi établie.
- Le principe de récurrence nous permet maintenant d'affirmer que pour tout entier naturel n, on a : $u_n = 2n^2 + 4n - 7$.

4.3 Pour tout entier $n \geqslant 1,\ u_n = \dfrac{3}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\,(k-1)$

On cherche à démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a : $u_n = n^2 - 1$.

- Amorce.
  On a $u_1 = 0$ et $1^2 - 1 = 0$. L'égalité entre u_n et $n^2 - 1$ est donc vraie pour $n = 1$.
- Hérédité.
  Soit p un entier naturel pour lequel on aurait $u_p = p^2 - 1$ (HR).

$$\begin{aligned} u_{p+1} &= \frac{3}{p+1}\sum_{k=1}^{p+1} k(k-1) \\ &= \frac{3}{p+1}\left(\left(\sum_{k=1}^{p} k(k-1)\right) + (p+1) \times p\right) \\ &= \frac{3}{p+1}\left(\frac{p}{3}u_p + (p+1) \times p\right) \\ &= \frac{3}{p+1}\left(\frac{p}{3}\left(p^2 - 1\right) + (p+1) \times p\right) \text{ en utilisant HR} \\ &= \frac{3}{p+1} \times (p+1)\left(\frac{p}{3}\,(p-1) + p\right) \\ &= p\,(p-1) + 3p \\ &= p^2 + 2p \end{aligned}$$

  Et le développement de l'expression $(p+1)^2 - 1$ donne :

$$\begin{aligned} (p+1)^2 - 1 &= \left(p^2 + 2p + 1\right) - 1 \\ &= p^2 + 2p \end{aligned}$$

  L'hérédité est ainsi établie.
- Le principe de récurrence nous permet maintenant d'affirmer que pour tout entier naturel n non nul, on a : $u_n = n^2 - 1$.