

A.P. en 2<sup>nde</sup>

## **Géométrie et argumentation.**

Activité sur des octogones : sont-ils réguliers ?

### **Présentation**

**Public visé** : tous les élèves de seconde.

**Objectifs** : travailler l'argumentation, la recherche d'informations, faire une synthèse.

### **Méthodologie**

Savoir lire l'énoncé, globalement puis mot par mot ;

Savoir utiliser une documentation personnelle pour retrouver le sens d'un mot, l'énoncé d'un théorème.

Savoir analyser un problème : de quoi s'agit-il ? Ai-je une théorie générale à ma disposition ?

Savoir critiquer (courtoisement) un énoncé.

Savoir conclure (une étude, un calcul, une résolution, une démonstration).

Savoir tirer profit des résultats acquis ou admis dans les questions précédentes.

Savoir distinguer entre constatation et démonstration.

Essayer, tâtonner, ... ;

### **En quoi c'est de l'accompagnement *personnalisé* ?**

Développement de compétences de base, renforcement de méthodes transversales.

Ouverture à la culture.

### **Pré-requis**

Les connaissances du collège.

### **Scenario de la séance**

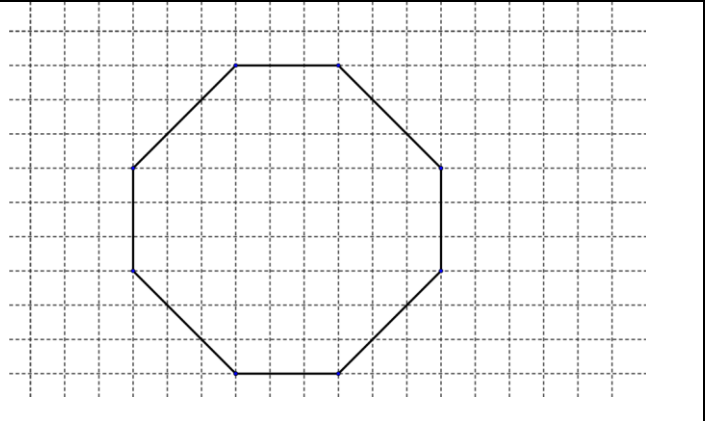
1h en demi-classe de préférence (16 ou 18 élèves par groupes de 2 élèves) puis travail à terminer en devoir maison.

## Fiche élève

Considérons l'**octogone 1** construit dans un carré de neuf unités de côté.

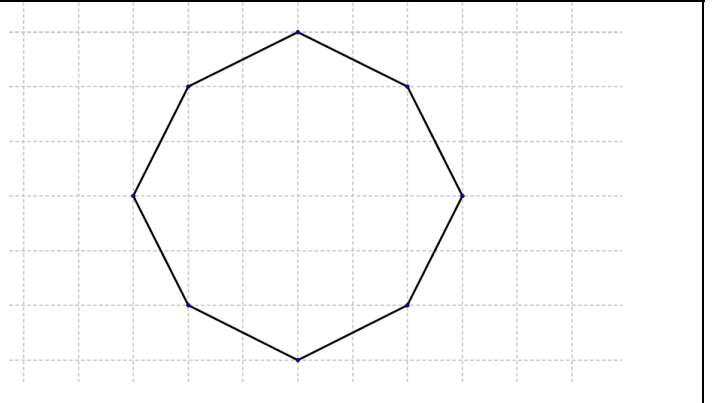
Cet octogone est-il régulier ?

<http://lewebpedagogique.com/brevet/files/2010/06/sujet-D-2010-06N.pdf>



Considérons l'**octogone 2** construit sur un maillage à mailles carrées.

Cet octogone est-il régulier ?

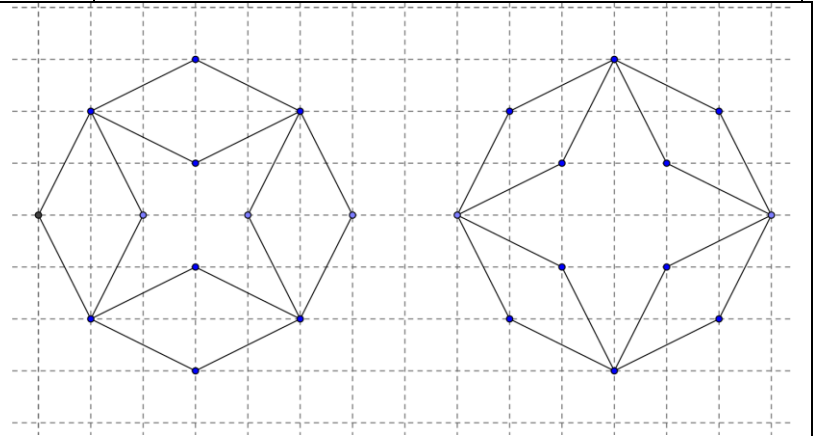


### Preuve visuelle :

On a tracé à l'intérieur de chacun des deux octogones identiques à l'octogone 2 des parallélogrammes qui dessinent des étoiles.

Ces deux étoiles sont-elles superposables ?

Quelle conclusion en tirer sur la régularité de l'octogone ?



On trouve dans Wikipedia la définition suivante de l'octogone régulier : Un **octogone** (du grec octo = huit et gonia = angle) est un **polygone** possédant huit côtés. Un **octogone régulier** est un octogone dont les huit côtés ont la même longueur et dont les angles internes ont même valeur.

Déterminer les mesures des côtés et des angles internes des **octogones 1 et 2** ? *Il est possible de nommer les sommets des octogones et de considérer que chaque carré du maillage a pour côté 1.*

### Construction

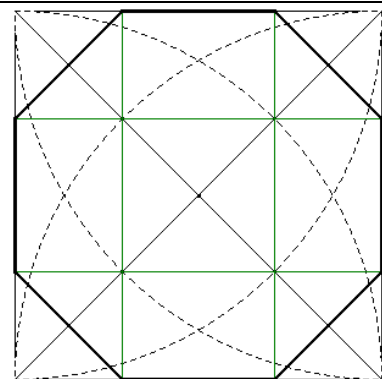
Dans un article sur la construction des mosaïques géométriques romaines, **Bernard PARZYSZ** propose cette construction d'octogone inscrit dans un carré : **octogone 3**.

Bien observer la figure ci-contre et rédiger un programme de construction de cette figure.

Reproduire cette figure avec un logiciel de géométrie.

L'**octogone 3** est-il régulier ? Proposer une démonstration.

On peut considérer que le côté du carré a pour côté  $a$ .



## Expérimentation

**L'octogone 1** n'est pas régulier:

Utilisation correcte du théorème de Pythagore pour calculer les longueurs des côtés en unités.

**L'octogone 2 :**

est régulier pour ceux qui n'ont calculé que les longueurs des côtés (6 groupes)

Est régulier pour deux groupes qui ont calculé les longueurs des côtés et les « angles au centre » et ont trouvé des angles de même mesure;

N'est pas régulier pour 6 groupes qui ont calculé les mesures des angles en utilisant les fonction  $\tan$  et  $\tan^{-1}$  avec pour certains confusion entre l'angle et sa tangente dans les écritures, d'autres ont construit des triangles extérieurs à l'octogone et utilisé  $\cos^{-1}$  et des angles complémentaires.

Un groupe a raisonné sur les longueurs différentes des diagonales qui joignent deux sommets séparés par un troisième.

Les autres groupes n'ont pas traité la question ou répondu sans démonstration.

### Preuve visuelle

Les élèves ont tous prouvé que les deux étoiles ne sont pas superposables en utilisant le calcul des aires des carrés intérieurs aux étoiles  
des mesures d'angles différents pour les branches de l'étoile  
les longueurs des diagonales des losanges complémentaires des étoiles dans l'octogone  
l'argument « ça se voit... »

4 des 6 groupes qui avaient trouvé l'octogone 2 régulier ont alors fait les calculs d'angles prouvant qu'en fait l'octogone 2 n'est pas régulier, un seul groupe a utilisé un argument proche de l'invariance par rotation « les octogones ne sont pas réguliers car si ils étaient réguliers en changeant le sens des points de l'étoile on obtiendrait toujours la même étoile ».

### Construction de l'octogone 3

De nombreux groupes d'élèves ont eu du mal à décrire correctement la construction de l'octogone 3.

6 groupes ont réalisé chez eux une figure avec geoGebra (utilisé une seule fois en salle info) et c'est parmi ces élèves que l'on trouve le meilleur algorithme de construction de la figure.

Deux groupes ont effectué (seuls?) les calculs des longueurs des côtés de l'octogone 3... et ont trouvé un octogone régulier alors que visuellement « on aurait cru que l'octogone n'était pas régulier »: les calculs valent mieux que le visuel ».

Reprise de l'activité en classe entière après distribution d'un programme de construction correct et calculs algébriques repris en classe.

3) Les deux ébauches ne sont pas superposables. Si on considère les points A, B, C, D et A', B', C', D', on remarque que les parallélogrammes ABCD et A'B'C'D' ont pas la même aire. On va le démontrer.



DAO est rectangle en O  
Donc d'après le théorème de Pythagore.  
 $DQ^2 + OQ^2 = DO^2$   
 $1^2 + 1^2 = DA^2$   
 $2 = DA^2$   
 $DA = \sqrt{2} \approx 1,4$

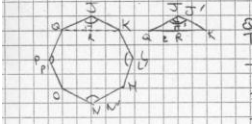
Aire ABCD =  $c \times c = \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$  unités



Aire A'B'C'D' =  $c \times c = 2 \times 2 = 4$

Aire ABCD < Aire A'B'C'D'

Donc les deux ébauches ne sont pas superposables.



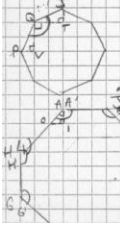
QJR est rectangle en R

$TAN(\hat{Q}) = \frac{QR}{JR}$   
 $TAN(\hat{Q}) = \frac{2}{1}$   
 $\hat{Q} = TAN^{-1}(\frac{2}{1})$   
 $\hat{Q} \approx 63,4^\circ$

Afin de voir vos notations = triangulaire QJR et QJR

$\hat{Q} = 63,4 \times 2 = 126,8^\circ$

On sait que  $\hat{P} = \hat{S} = 63,4^\circ$   
La somme des angles des triangles est égale à  $180^\circ$   
On a  $\hat{P} = 63,4^\circ$  et  $\hat{V} = 90^\circ$   $\hat{Q} = 180 - (90 + 63,4) = 26,6^\circ$



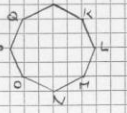
$\hat{Q} = 26,6 + 26,6 + 90 = 143,2^\circ$   
donc l'octogone n'est pas régulier  
(voir construction avec question 2)

On sait que  $AB = CD = FE = GH = 3$  unités  
On calcule BC grâce à Pythagore dans la question 1, donc  $BC = DE = GF = HA = \sqrt{2} = 1,4$

AIG est rectangle en I

$TAN(\hat{A}) = \frac{AI}{GI}$   
 $TAN(\hat{A}) = 1$   
 $\hat{A} = TAN^{-1}(\frac{1}{1})$   
 $\hat{A} = 45^\circ$

$\hat{A}' = 45 + 90 = 135^\circ$   
Donc  $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D} = \hat{E} = \hat{F} = \hat{G} = \hat{H}$   
il y a plus rapide - conclusion ?



On a déjà calculé, dans la question 2 les côtés de l'octogone  
 $IK = KL = LH = MN = NO = OP = PQ = QJ = 2,828$  unités

On a aussi déjà calculé les angles dans les questions précédentes  
 $\hat{Q} = \hat{P} = \hat{N} = \hat{R} = 126,8^\circ$   
 $\hat{Q} = \hat{R} = \hat{A} = \hat{O} = 143,2^\circ$  conclusion!

Construction

- Construire le carré de côté a.
- Construire ses diagonales
- Tracer les 4 arcs de cercles lesquels
- Aux points d'intersection des arcs et des diagonales, tracer un carré
- Prolonger les côtés du carré
- Construire l'octogone équerre

HAO est rectangle en O

Donc d'après le théorème de Pythagore  
 $HO^2 + AO^2 = HA^2$   
 $1^2 + 1^2 = HA^2$   
 $2 = HA^2$   
 $HA = \sqrt{2} = 1,4$

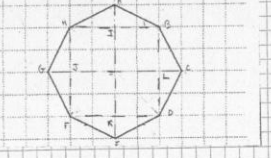
HAOH est un carré. Sa diagonale HA est égale à 1,4

ABJO est un rectangle avec  $AB = OJ$  et  $AO = BJ$

Donc  $AB + AB = OJ + OJ = 2$  unités

L'octogone 3 n'est pas régulier car ses huit côtés ne sont pas de même longueur. Conclusion fautive

octogone 2



On sait que HIA est un triangle rectangle en I tel que :

$HI = 2$  unités  $AI = 1$  unité

On applique le théorème de Pythagore :

$HI^2 = HI^2 + AI^2$

$HI^2 = 2^2 + 1^2$

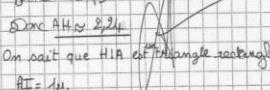
$HI^2 = 4 + 1$

$HI^2 = 5$

Donc  $HI = \sqrt{5}$

Donc  $HI \approx 2,24$

On sait que HIA est un triangle rectangle en I et que  $HI = 2$  et  $AI = 1$ .



On sait sur la figure que  $\hat{HIA} = \hat{AIB} = \hat{BIC} = \hat{CLD} = \hat{DKE} = \hat{EKF} = \hat{LGS} = \hat{GTH}$

Donc  $AB = BC = CD = DE = EF = FG = GH = HA$

Calculons les angles

On calcule  $\hat{HAB}$

On sait que  $\hat{HAB} = \hat{HAI} + \hat{IAB}$

Car  $\hat{HAI} = \frac{HI}{AI} = \frac{2}{1} = 2$

Donc  $\hat{HAI} \approx 63,43^\circ$

On sait que  $\hat{IAB} = \hat{HAI}$

Donc  $\hat{IAB} \approx 63,43^\circ$

Donc  $\hat{HAB} \approx 63,43 \times 2$

$\hat{HAB} \approx 126,86^\circ$

On calcule l'aire de l'octogone 2 :

EF GH est un carré de côté 2 u.

$P_{EFGH} = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 \times 8 = 2^2 + 1 \times 2 = 4 + 2 = 6$

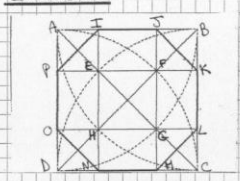
L'aire de l'octogone 2 est de  $12 u^2$

Donc  $12 \neq 12$

Donc ces deux ébauches ne sont pas superposables.

En conclusion, l'octogone n'est pas régulier car les deux ébauches ne sont pas superposables. Il faut préciser davantage.

Construction



Programme de construction de la figure ci-dessus :

- Tracer un carré ABCD
- Tracer ses diagonales
- Tracer l'arc de cercle passant par les points A et C qui a pour centre le point B
- Tracer l'arc de cercle passant par les points B et C qui a pour centre A
- Tracer l'arc de cercle passant par les points B et D qui a pour centre A
- Tracer l'arc de cercle passant par les points C et D qui a pour centre B
- Tracer les droites passant par les points E et F, H et G, E et H, F et G
- Nommer les points d'intersection des droites et des côtés du carré par les lettres : I, J, K, L, M, N, O, P et P'
- Relier les points I, J, K, L, M, N, O, P et P'