Préparation à l'agrégation interne de mathématiques - Année 2011-2012
exponentielle et puissance d'une matrice - 23 novembre 2011

La décomposition de Dunford sera utilisée à plusieurs reprises. Il est conseillé de bien en connaître la formulation. Références : [Mon07], [Gri02] et [Gou94] par exemple.

Exercice 1. ***(exponentielle d'une matrice)*** *Soit A appartenant à $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$.*

1. *Justifier que la série d'applications* $A \longmapsto \sum_{k\geqslant 0} \frac{A^k}{k!}$ *est convergente et continue sur* $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$.

   On note $\exp(A)$ *ou* e^A *la somme de cette série.*
2. *Justifier que, si $AB = BA$, alors $e^{A+B} = e^A e^B$. En déduire que, quelle que soit la matrice A, la matrice e^A est inversible.*
3. *Vérifier l'égalité* $\det(e^A) = e^{\mathrm{tr}(A)}$ *successivement :*
   (a) *pour les matrices diagonales ;*
   (b) *pour les matrices diagonalisables ;*
   (c) *pour les matrices quelconques de $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$ (utiliser un argument de densité ou bien la trigonalisation).*
4. *Calcul explicite d'une exponentielle de matrice.*
   (a) *Montrer que, si $A = D + N$ est la décomposition de Dunford de A, alors*
   $$e^A = e^D.p(N)$$
   où p est un polynôme que l'on définira.
   (b) *Calculer e^A si* $A = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.
5. *Compléments.*
   (a) *Montrer que si A est une matrice réelle antisymétrique, alors e^A appartient à* $\mathrm{SO}(d, \mathbb{R})$.
   (b) *L'application exp :* $\mathcal{M}_d(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{GL}(d, \mathbb{R})$ *est-elle surjective ? injective ?*
   Indication : Pour la non-injectivité, on pourra calculer $\exp(tA)$ *avec* $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 2. ***(puissance d'une matrice)*** *On s'intéresse, pour une matrice A appartenant à $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$, à la convergence éventuelle de la suite $(A^n)_n$ des puissances de A. On note $\rho(A)$ son rayon spectral (le maximum des modules des valeurs propres de A).*

1. *Montrer que, si $\rho(A) > 1$, alors la suite $(A^n)_n$ diverge.*
2. *On suppose ici que $\rho(A) < 1$. On veut montrer que la suite $(A^n)_n$ converge vers la matrice nulle.*
   (a) *Montrer cette propriété en supposant A diagonalisable.*
   (b) *Cas général. Soit $A = D + N$ la décomposition de Dunford de A. Développer A^n puis en déduire que* $\lim A^n = 0$.
3. *On suppose que λ est une valeur propre de A vérifiant $|\lambda| = 1 \neq \lambda$. Montrer que la suite $(A^n)_n$ diverge.*
4. *(Plus difficile) On suppose ici que 1 est une valeur propre de A et une racine multiple du polynôme minimal de A. Montrer que la suite $(A^n)_n$ diverge.*
   Indication : Justifier l'existence d'un vecteur v appartenant à $\ker(A - Id)^2$ *et pas à* $\ker(A - Id)$, *considérer le vecteur $v' = (A - Id)v$ puis montrer que la suite $(A^n v)_n$ diverge.*
5. *Bilan : indiquer une condition nécessaire et suffisante sur les valeurs propres de A pour la convergence de la suite $(A^n)_n$.*

Références

[Gou94] Xavier Gourdon. Algèbre. Les maths en tête. Ellipses, Paris, 1994.

[Gri02] Joseph Grifone. Algèbre linéaire. Cépaduès-Éditions, Toulouse, 2002.

[Mon07] Jean-Marie Monier. Algèbre et géométrie MP, Cours, méthodes et exercices corrigés, 5eédition. J'intègre. Dunod, Paris, 2007.