Préparation à l'agrégation interne de mathématiques - Année 2011
Espaces euclidiens - 12 et 26 octobre 2011

Éléments de réponses sur les exercices restant à corriger de la fiche précédente (12 octobre 2011). L'exercice 3 (sur les projecteurs orthogonaux) sera complété par quelques informations sur les matrices de Gram.

Exercice 2. ***(une norme euclidienne sur l'espace des matrices carrées)***

Correction.

1. Bilinéarité, symétrie. Pour le caractère défini positif : les termes diagonaux de la matrice ${}^tAA$ sont de la forme $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2$ donc leur nullité entraîne la nullité de tous les coefficients de A.
2. $\|A\| = \sqrt{\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2}$
3. On peut calculer $\operatorname{tr}\left({}^tE_{ij}E_{kl}\right)$ « à la main » ou bien calculer $\|E_{ij}\|^2$ et $\|E_{ij}+E_{kl}\|^2$ et utiliser une identité de polarisation.
4. On a $\|\Omega\|^2 = \operatorname{tr}\left({}^t\Omega\Omega\right) = \operatorname{tr}(Id) = n$ pour toute matrice orthogonale.
5. La matrice **symétrique réelle** $A = (a_{ij})$ est diagonalisable dans une base orthonormale : il existe Ω vérifiant ${}^t\Omega\Omega = Id$ et $A = {}^t\Omega\Lambda\Omega$ avec $\Lambda = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Donc

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2 = \|A\|^2 = \|{}^t\Omega\Lambda\Omega\|^2 = \operatorname{tr}\left({}^t\left({}^t\Omega\Lambda\Omega\right){}^t\Omega\Lambda\Omega\right) = \operatorname{tr}\left({}^t\Omega{}^t\Lambda\Omega{}^t\Omega\Lambda\Omega\right) = \operatorname{tr}\left({}^t\Omega\Lambda^2\Omega\right)$$

$$= \operatorname{tr}\left(\Omega{}^t\Omega\Lambda^2\right) = \operatorname{tr}\Lambda^2 = \sum_{k=1}^{n} \lambda_i^2$$

Exercice 4. ***(la dimension 2)*** *L'espace $\mathbb{R}^2$ est muni de la structure euclidienne canonique.*

Correction.

1. L'égalité ${}^t\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = Id$ entraîne l'existence de réels θ et φ tels que $a = \cos\theta$, $c = \sin\theta$, $d = \cos\varphi$, $b = \sin\varphi$ et $\sin(\theta+\varphi) = 0$.
   La condition sur le déterminant s'écrit alors $\cos(\theta+\varphi) = 0$ ce qui permet d'obtenir $\varphi = -\theta$ et de conclure.
2. En notant $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, on établit la relation $R_\theta R_{\theta'} = R_{\theta+\theta'}$.
   Le groupe $\mathrm{O}(2,\mathbb{R})$ n'est pas commutatif (la composée de deux réflexions vectorielles planes est une rotation dont l'angle orienté dépend de l'ordre).
3. Avec les notations précédentes, on a $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} = R_{\pi/3}$ que l'on peut décomposer en produit S_2S_1 de deux réflexions : $S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ par rapport à l'axe des abscisses et $S_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ par rapport à la droite d'angle polaire $\pi/6$.

Exercice 5. *(la dimension 3) L'espace $\mathbb{R}^3$ est muni de la structure euclidienne canonique.*

Correction.

1. (traité dans [Gri02], pages 247-248) L'endomorphisme défini par la matrice $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ est la rotation d'angle $\pi/3$, d'axe dirigé par le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
2. Deux méthodes (au moins) pour obtenir la matrice $\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 7 & 4 & -4 \\ 4 & 1 & 8 \\ -4 & 8 & 1 \end{pmatrix}$:
   (a) Si s est la symétrie orthogonale par rapport au plan d'équation $x - 2y + 2z = 0$, alors $s = 2p - id$ avec p le projecteur ortogonal sur le plan d'équation $x - 2y + 2z = 0$. On peut utiliser la formule $p(\vec{v}) = \vec{v} - \frac{\vec{v}.\vec{n}}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}$ avec le vecteur normal $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ c'est-à-dire $s(\vec{v}) = 2p(\vec{v}) - \vec{v} = \vec{v} - 2\frac{\vec{v}.\vec{n}}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}$ pour obtenir la matrice.
   (b) Si on complète le vecteur unitaire $\vec{n'} = \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|}$ en une base orthonormale (avec par exemple $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \vec{n'} \wedge \vec{u} = \frac{1}{3\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$), alors dans cette base $(\vec{n'}, \vec{u}, \vec{v})$, la matrice de la symétrie est $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. La matrice $(\vec{n'}|\vec{u}|\vec{v})$ de changement de base est orthogonale (son inverse est sa transposée) donc la matrice cherchée est $(\vec{n'}|\vec{u}|\vec{v})\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}{}^t(\vec{n'}|\vec{u}|\vec{v})$.
3. Le vecteur $v_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est unitaire et dirige l'axe. Le vecteur $v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est unitaire et orthogonal à v_1. Donc la famille (v_1, v_2, v_3) avec $v_3 = v_1 \wedge v_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ est une base orthonormale directe. Dans cette base, la matrice de rotation est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(2\pi/3) & -\sin(2\pi/3) \\ 0 & \sin(2\pi/3) & \cos(2\pi/3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$. En effectuant la conjugaison correspondant au changement de base, on obtient la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ qui est une matrice de permutation. (Voir les images des trois vecteurs de la base canonique.)
   Il était également possible d'utiliser la question 1 de ce même exercice.

Références

[Gri02] Joseph Grifone. Algèbre linéaire. Cépaduès-Éditions, Toulouse, 2002.

Préparation à l'agrégation interne de mathématiques - Année 2011
Espaces vectoriels normés de dimension finie - 26 octobre 2011

Le texte et les exercices ci-dessous suivent un déroulement très linéaire, proche d'un cours. Une partie des exercices relèvent en effet de démonstrations de résultats explicites du programme et peuvent donc être corrigés avec tout manuel traitant du sujet (ou admis...).

Les remarques et détails porteront plutôt sur les exercices suivants : ex1, ex2 1)2), ex3, ex4, ex8, ex9.

1 Espaces métriques

Le cadre est ici celui des espaces métriques, c'est-à-dire munis d'une distance : une application $d : X \times X \longrightarrow [0; +\infty[$ qui est symétrique, qui vérifie l'inégalité triangulaire $d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z)$ et qui est nulle uniquement sur la diagonale de $X \times X$.

Si (X_1, d_1) et (X_2, d_2) sont deux espaces métriques, le produit cartésien $X_1 \times X_2$ peut être muni de la métrique d définie par $d((x_1, x_2), (y_1), y_2)) = d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2)$. Ceci se généralise à un produit fini d'espaces métriques.

On définit :

- les *boules ouvertes*, *fermées*
- un sous-ensemble contenant un point x est un *voisinage* de x s'il contient une boule ouverte centrée en x
- un sous-ensemble est *ouvert* s'il contient une boule ouverte centrée en chacun de ses points
- un sous-ensemble est *fermé* si son complémentaire dans X est ouvert

Exercice 1. ***(Ouverts, fermés, boules ouvertes, fermées dans un espace métrique)***

1. *Une boule ouverte est ouverte (si si).*
2. *Une boule fermée est fermée.*

Une distance permet de définir, entre autres :

1. la convergence des suites : Si $(x_n)_n$ est une suite de X, on dit qu'elle converge vers un élément x de X si $\lim_{n\to+\infty} d(x_n, x) = 0$. On note alors $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$. (Cette limite est unique. Pourquoi ?)
2. la continuité locale d'applications : une application $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ entre deux espaces métriques est continue en $x_0 \in X$ si :
$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 : d_X(x, x_0) < \eta \Longrightarrow d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$
3. la continuité globale (continuité locale partout sur X)
4. la compacité : un sous-ensemble K de X est *compact* si, de toute suite $(x_n)_n$ d'éléments de K, on peut extraire une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_n$ ($\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante) convergeant vers un élement x de K.
5. les suites de Cauchy et le caractère complet d'un espace métrique (non traités ici)

Exercice 2. ***(Continuité)***

1. *Montrer que $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ est continue en $x_0 \in X$ si et seulement si, pour tout voisinage $V \subseteq Y$ de $f(x_0)$, alors $f^{-1}(V)$ est un voisinage de x_0.*
2. *Montrer que $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ est continue en $x_0 \in X$ si et seulement si, pour toute suite $(x_n)_n$ de X convergeant vers x_0, alors la suite $(f(x_n))_n$ converge vers $f(x_0)$.*
3. *Montrer que $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ est continue sur X si et seulement si, pour tout ouvert $O \subseteq Y$, alors $f^{-1}(O)$ est un ouvert de X.*
4. *Justifier que la composée de deux applications continues est continue.*
5. *Pourquoi la fonction partie entière n'est-elle pas continue en 1 ?*

6. *Montrer que $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ est continue sur X si et seulement si, pour tout fermé $F \subseteq Y$, alors $f^{-1}(F)$ est un fermé de X.*

Exercice 3. ***(Compacité)***

1. *Montrer que si $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ est continue sur X et si K est un compact de X alors l'image directe $f(K)$ est un compact de Y.*
2. *Montrer qu'un sous-ensemble compact de (X, d_X) est fermé et borné.*
3. *Montrer que si $F \subseteq K \subseteq X$ avec K compact et F fermé, alors F est compact.*

2 Espaces vectoriels normés

Sur un espace vectoriel, une norme $\|.\|$ définit une distance par la relation $d(x, y) = \|x - y\|$.

Deux normes $\|.\|$ et $\|.\|'$ sont dites *équivalentes* s'il existe deux réels strictement positifs a et b tels que, pour tout vecteur x

$$a\|x\|' \leqslant \|x\| \leqslant b\|x\|'.$$

Si c'est le cas, tout ouvert pour l'une des normes est un ouvert pour l'autre (elles définissent la même *topologie*).

Les trois normes usuelles sur $\mathbb{K}^n$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) : si $x = {}^t\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \end{pmatrix}$, on note

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \quad ; \quad \|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad ; \quad \|x\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} |x_i|$$

Ces trois normes coïncident si $n = 1$. La norme $\|.\|_2$ est la norme issue du produit scalaire euclidien (ou hermitien).

Exercice 4. ***(Comparaison des normes usuelles dans $\mathbb{K}^n$)***

1. *Démontrer, pour tout vecteur x de $\mathbb{K}^n$, les inégalités :*

$$\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_1 \quad ; \quad \|x\|_2 \leqslant \sqrt{n}\|x\|_\infty \quad ; \quad \|x\|_1 \leqslant \sqrt{n}\|x\|_2.$$

2. *En déduire que les trois normes $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ et $\|.\|_\infty$ de $\mathbb{K}^n$ sont équivalentes.*
3. *Tracer les sphères unités de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ pour les trois normes usuelles.*

Exercice 5. ***(Compacts de $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)***

D'après l'exercice 3, un compact est fermé et borné.

1. *Montrer que les compacts de $\mathbb{R}$ sont les ensembles fermés bornés. (Utiliser le fait que les intervalles fermés bornés de $\mathbb{R}$ sont compacts.)*
2. *Étendre ce résultat à $\mathbb{C}$ (pour la distance usuelle).*
3. *Montrer que les compacts de $(\mathbb{K}^n, \|.\|_\infty)$ sont les ensembles fermés bornés. Généraliser aux normes $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$.*

Exercice 6. ***(Équivalences de normes et compacité en dimension finie)***

Soit $(E, N(.))$ un espace vectoriel normé de dimension finie $n > 0$ sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Le choix d'une base $(e_1, \dots, e_n)$ permet d'identifier E à $\mathbb{K}^n$ et donc de munir aussi E d'une norme $\|.\|_\infty$: si $x = \sum x_i e_i$, on pose $\|x\|_\infty = \max |x_i|$.

1. *Montrer qu'il existe un réel positif β tel que $N(x) \leqslant \beta\|x\|_\infty$ pour tout x de E.*
2. *Vérifier que l'application $(E, \|.\|_\infty) \to (\mathbb{R}, |.|) : x \mapsto N(x)$ est β-lipschitzienne (donc continue).*
3. *On note S la sphère unité de E pour la norme $\|.\|_\infty$.*
   En utilisant la restriction de l'application précédente à S, montrer qu'il existe un réel strictement positif α tel que $\alpha\|x\|_\infty \leqslant N(x)$ pour tout x de E.

4. *Justifier que deux normes quelconques sur E sont équivalentes.*
5. *Justifier que la boule unité fermée de $(E, N(.))$ est compacte.*

Théorème 2.1. ***(Continuité d'applications linéaires)*** *Soit f une application linéaire entre deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) f est continue sur E ;

(ii) f est continue en 0_E ;

(iii) f est bornée sur la boule fermée (resp. sphère) unité de E ;

(iv) il existe un réel positif M tel que $\|f(x)\|_F \leqslant M\|x\|_E$ pour tout x dans E ;

(v) f est lipshitzienne ;

(vi) f est uniformément continue.

Si l'une de (toutes) ces propriétés est vérifiée, la norme de f (*subordonnée* aux normes $\|.\|_E$ et $\|.\|_F$) est la borne inférieure des réels M satisfaisant (iv) :

$$|||f||| = \sup_{\substack{x\in E \\ x\neq 0}} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{\substack{x\in E \\ 0<\|x\|_E\leqslant 1}} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{\substack{x\in E \\ \|x\|_E=1}} \|f(x)\|_F$$

L'ensemble des applications linéaires continues de $(E, \|.\|_E)$ dans $(F, \|.\|_F)$ forme un espace vectoriel normé.

Exercice 7. *Montrer que si $f \in L(F, G)$ et $g \in L(E, F)$, alors (pour les normes subordonnées) :*

$$|||f \circ g||| \leqslant |||f||| \times |||g|||.$$

3 En dimension finie

En dimension finie, par compacité de la boule unité, toutes les applications linéaires sont continues et les *sup* sont des *max* (ils sont atteints).
En particulier l'extraction d'un coefficient d'une matrice $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K} : A = (a_{ij}) \mapsto a_{ij}$ est une forme linéaire continue. Il en découle que la trace et le déterminant sont des applications continues de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$.
La transposition est continue, le produit matriciel également (en tant qu'application bilinéaire).

De plus, puisque l'ensemble des applications linéaires de E dans F est lui-même de dimension finie, toutes les normes sur $\mathcal{L}(E; F)$ sont équivalentes. On peut donc parler d'ouvert, de fermé, de compact,... dans $\mathcal{L}(E; F)$ (ou $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$) et $\mathcal{L}(E)$ (ou $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$).

Exercice 8. ***(normes d'endomorphismes en dimension finie)*** *On considère l'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$ muni d'une norme quelconque $\|.\|$ et une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vue comme un endomorphisme de $\mathbb{K}^n$.*

1. *Calculer la norme $|||A|||$ de A subordonnée à $\|.\|$ lorsque :*
   (a) $A = Id$
   (b) *A est une homothétie de rapport λ*
2. *La norme euclidienne définie par $\sqrt{\mathrm{tr}({}^tAA)}$ (exercice 2 du 12/10/2011) est-elle une norme subordonnée ?*
3. *Montrer que si p est un projecteur (non nul) alors $|||p||| \geqslant 1$.*
   Un projecteur de $(\mathbb{R}^2, \|.\|_1)$ de norme 2 ?

Exercice 9. ***(normes d'endomorphismes en dimension finie, suite)*** *Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vue comme un endomorphisme de $\mathbb{K}^n$.*

1. *Montrer que $|||A|||_\infty = \max_i \sum_j |a_{i,j}|$ (norme subordonnée à la norme $\|.\|_\infty$).*

2. *Montrer que* $|||A|||_1 = \max_j \sum_i |a_{i,j}|$ *(norme subordonnée à la norme* $\|.\|_1$*).*
3. *On suppose ici* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. *Soit* $\rho(A) = max_i|\lambda_i|$ *le rayon spectral de* A *(maximum du module des valeurs propres* $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ *de* A*).*
   Montrer que, pour toute norme subordonnée $|||.|||$, *on a* $\rho(A) \leqslant |||A|||$.

$\boxed{\textbf{Exercice 10.}}$ ***(convergence de suites de matrices)*** *On considère une suite* $(A_n)_n$ *de matrices* $A_n = (a_n^{i,j})_{i,j}$ *de* $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.

1. *Démontrer que les propositions suivantes sont équivalentes :*
   (a) *La suite* $(A_n)_n$ *est convergente dans* $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ *(pour une/toute norme).*
   (b) *Les suites* $(a_n^{i,j})_n$ *convergent dans* $\mathbb{K}$.
   (c) *Quel que soit le vecteur* v *de* $\mathbb{K}^q$, *la suite* $(A_n.v)_n$ *est convergente dans* $\mathbb{K}^p$ *(pour une/toute norme).*
2. *Montrer que si ces propriétés sont vérifiées et si* A *désigne* $\lim A_n$, *alors* $\lim(A_n.v) = A.v$ *pour tout vecteur* v *de* $\mathbb{K}^q$.