Préparation à l'agrégation interne de mathématiques - Année 2012-2013
Espaces vectoriels normés de dimension infinie - 28 novembre 2012

Exercice 1. Exemples et contre-exemples dans $E = \mathcal{C}([0;1], \mathbf{R})$.

On considère l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}([0;1], \mathbf{R})$ des fonctions réelles continues sur $[0;1]$ muni de l'une des trois normes suivantes :

$$\|f\|_\infty = \sup_{[0;1]} |f(x)| = \max_{[0;1]} |f(x)| \quad ; \quad \|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|dx \quad ; \quad \|f\|_2 = \left(\int_0^1 |f(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

1. *Justifier que la suite $(p_n)_n$ définie par $p_n(x) = x^n$ est convergente pour les normes $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ mais pas pour la norme $\|.\|_\infty$.*
2. *Vérifier que, pour tout f dans E, on a $\|f\|_1 \leqslant \|f\|_\infty$ et $\|f\|_2 \leqslant \|f\|_\infty$.*
3. *Pour tout entier naturel non nul n, on pose $g_n(x) = \left(1 - \frac{nx}{2}\right) \mathbf{1}_{[0;\frac{2}{n}]}(x)$ (où $\mathbf{1}_A$ désigne la fonction indicatrice du sous-ensemble A de $\mathbf{R}$).*
   (a) *Étudier la convergence éventuelle de la suite $(g_n)_n$ dans E muni de $\|.\|_1$ et de $\|.\|_2$.*
   (b) *Justifier que les normes $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ ne sont pas équivalentes.*
   (c) *Démontrer que dans $(E, \|.\|_\infty)$, la suite $(g_n)_n$ est située sur la sphère unité et ne possède aucune sous-suite convergente. (On pourra étudier $\|g_m - g_n\|_\infty$ pour $m > n$.)*
4. *Pour tout entier naturel non nul n, on pose $h_n = ng_n$.*
   (a) *Vérifier que la suite $(h_n)_n$ est divergente dans $(E, \|.\|_\infty)$ et dans $(E, \|.\|_2)$.*
   (b) *Justifier que, dans $(E, \|.\|_1)$, la suite $(h_n)_n$ est bornée et ne possède aucune sous-suite convergente.*
5. *Soit g une fonction continue sur $[0;1]$, à valeurs dans $[0;1]$.*
   On note $u = u_g$ l'endomorphisme de E défini par $u(f) : x \mapsto f \circ g(x)$.
   (a) *Vérifier que , pour $\|.\|_\infty$, l'application linéaire u est continue et préciser sa norme subordonnée.*
   (b) *Démontrer que, si $g(x) = x^2$, alors l'application linéaire u n'est pas continue pour la norme $\|.\|_1$. (On pourra utiliser la suite $(h_n)_n$.)*

Exercice 2. Un grand classique

1. *Soient $(E, \|.\|_E)$ un espace vectoriel normé et $(F, \|.\|_F)$ un espace de Banach.*
   Démontrer que pour la norme subordonnée, l'espace vectoriel $\mathcal{L}(E,F)$ des applications linéaires continues de $(E, \|.\|_E)$ dans $(F, \|.\|_F)$ forme un espace de Banach.
2. *En déduire que si E est un espace vectoriel normé sur $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, alors le dual topologique $E' = \mathcal{L}(E, \mathbf{K})$ est un espace de Banach.*

Exercice 3. **Deux séries d'endomorphismes**

1. *Montrer que si* $f \in L(F,G)$ *et* $g \in L(E,F)$*, alors (pour les normes subordonnées) :*

$$|||f \circ g||| \leqslant |||f||| \times |||g|||.$$

2. *Soient* $(E, \|.\|)$ *un espace de Banach et* u *un endomorphisme continu de* E *vérifiant* $|||u||| < 1$.
   (a) *Justifier que la série* $\sum_{n\geqslant 0} u^n$ *est convergente.*
   (b) *En déduire que l'endomorphisme* $id - u$ *de* E *est inversible et que* $(id-u)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} u^n$.
   (c) *Démontrer que l'ensemble* $\mathcal{GL}(E)$ *des automorphismes bicontinus est un ouvert de* $\mathcal{L}(E)$.
3. *(Exponentielle d'endomorphisme) Soient* $(E, \|.\|)$ *un espace de Banach et* u *un endomorphisme continu de* E.
   (a) *Démontrer que la série* $\sum_{n\geqslant 0} \frac{u^n}{n!}$ *est convergente. On note* $exp(u) = e^u$ *sa somme.*
   (b) *Justifier que, si* u *et* v *sont deux endomorphismes continus de* E *qui commutent, alors* $e^{u+v} = e^u \circ e^v$.
   (c) *Justifier que l'application* $t \longmapsto e^{tu}$ *définit un morphisme continu de* $\mathbf{R}$ *dans* $\mathcal{GL}(E)$.

Autour de ce thème : quelques références de sujets.

- sujet 2003, parties I et II : $\ell^2(\mathbf{Z})$ est complet, espace de Hibert, projection sur un convexe fermé, exponentielle d'opérateurs
- sujet 2004, partie I : normes sur un espace vectoriel
- sujet 2005, questions préliminaires, partie II, partie III : étude d'un endomorphisme, spectre, propriété de Baire
- sujet 2010, partie I : norme, continuité, propriété de Baire, complétude
- sujet 2011, partie III : continuité d'applications non linéaires entre espaces vectoriels normés