Préparation à l'agrégation interne

Épreuve sur table du 4 décembre 2010

Le thème de ce devoir est : « débuts d'épreuves ».

Il est constitué de trois tiers d'épreuves, celles de 2008 (suites, séries), 2006 (équations différentielles) et 2002 (transformation de Fourier). On les abordera dans l'ordre que l'on voudra en se limitant :

- Pour l'épreuve de 2008, à la partie I et, dans la partie II, aux questions 1) et 2) ;
- Pour l'épreuve de 2006, aux parties I et II,
- Pour l'épreuve de 2002, aux parties I et II (plus, éventuellement, III1).

La mesure des tiers a été faite en comptant le nombre de questions, ce qui est un invariant assez grossier. Compte tenu qu'une épreuve n'est pas faite pour être terminée, le devoir proposé est donc probablement trop long pour être traité intégralement en 6 h.

NB : Si vous trouvez que 6 h d'un coup, c'est trop long, vous pouvez aborder 2 tiers en 4 h et garder le dernier tiers comme devoir à la maison. Vous pourrez ramener la partie correspondante mercredi mais déposez ce que vous aurez fait en 4 h dès demain afin que je puisse commencer à corriger.

Introduction et notations

Dans ce problème, on note $\mathbf{N}$ l'ensemble des nombres entiers, $\mathbf{R}$ le corps des nombres réels.

On dit qu'un endomorphisme T d'un espace vectoriel est *nilpotent* s'il existe un nombre entier $s \geqslant 0$ tel que $\mathrm{T}^s = 0$.

Si f est une fonction de classe C^∞ de la variable réelle x et n un entier $\geqslant 0$, on note $f^{(n)}$ ou $\dfrac{d^n f}{dx^n}$ la dérivée n-ième de la fonction f.

Si g est une fonction de classe C^∞ de la variable $x = (x_1, \dots, x_n)$ définie dans une partie ouverte de $\mathbf{R}^n$, on note $\dfrac{\partial g}{\partial x_i}$ la dérivée partielle de g par rapport à la variable x_i, pour $1 \leqslant i \leqslant n$.

Pour des entiers p et n tels que $0 \leqslant p \leqslant n$, on définit les coefficients binomiaux par

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!} = \frac{n\,(n-1)\,\dots\,(n-p+1)}{p!} \quad \text{pour} \quad 0 < p < n, \quad \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1.$$

L'un des objets de ce problème est la démonstration et l'application de la *formule de réversion de Lagrange* qui permet de calculer, dans certains cas, la dérivée n-ième d'une fonction réciproque.

On étudie d'abord la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ dont le terme général est l'unique solution $\geqslant 0$ de l'équation

$$(\mathrm{E}_n) \qquad x^n + x^{n-1} + \dots + x - 1 = 0.$$

Dans un premier temps, on établit directement une expression explicite de u_n comme somme d'une série convergente (parties **I** et **II**).
On établit ensuite la formule de réversion de Lagrange (partie **III**).
On applique enfin cette formule pour obtenir une autre démonstration de l'expression de u_n (partie **IV**).

On rappelle les résultats suivants qui pourront être utilisés sans démonstration :

A) Lorsque l'entier n tend vers $+\infty$, on a l'équivalence (*formule de Stirling*) :

$$n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}.$$

B) Pour tout entier $q \geqslant 1$, la série entière

$$\sum_{n \geqslant 0} (-1)^n \binom{n+q-1}{n} x^n$$

a un rayon de convergence égal à 1 et, pour $-1 < x < 1$, sa somme est égale à $1/(1+x)^q$.

C) Le *théorème des fonctions implicites* pour une fonction F de classe C^∞, définie sur $\mathbf{R}^3$, peut s'énoncer ainsi :

On suppose qu'en un point (x_0, y_0, z_0) de $\mathbf{R}^3$, on a

$$\mathrm{F}(x_0, y_0, z_0) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0.$$

Il existe alors un voisinage ouvert U de (x_0, y_0) dans $\mathbf{R}^2$, un voisinage ouvert V de z_0 dans $\mathbf{R}$ et une fonction $\varphi : \mathrm{U} \to \mathrm{V}$ caractérisée par la condition

$$\forall (x, y) \in \mathrm{U},\ \forall z \in \mathrm{V}, \quad (\mathrm{F}(x, y, z) = 0 \Longleftrightarrow z = \varphi(x, y)).$$

La fonction φ est de classe C^∞ sur U et pour tout point (a,b) de U, on a

$$F(a,b,\varphi(a,b)) = 0\,,$$

ainsi que les relations

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}(a,b) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(a,b,\varphi(a,b))}{\frac{\partial F}{\partial z}(a,b,\varphi(a,b))}\,, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y}(a,b) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(a,b,\varphi(a,b))}{\frac{\partial F}{\partial z}(a,b,\varphi(a,b))}\,.$$

On dit que la fonction φ est *définie implicitement* sur U par la relation $F(x,y,z) = 0$.

D) Soit $(a_{n,k})_{(n,k)\in\mathbf{N}\times\mathbf{N}}$ une suite double de nombres réels. Si la somme $\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{k=0}^{\infty}|a_{n,k}|\Big)$ est finie, alors les trois expressions

$$\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{k=0}^{\infty}a_{n,k}\Big)\,,\quad \sum_{k=0}^{\infty}\Big(\sum_{n=0}^{\infty}a_{n,k}\Big)\,,\quad \sum_{q=0}^{\infty}\Big(\sum_{n+k=q}a_{n,k}\Big)\,,$$

ont un sens et sont égales. Leur valeur commune est notée $\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}a_{n,k}$.

E) Soit R un nombre réel >0. Si les fonctions f et g sont sommes de séries entières convergentes dans l'intervalle $]-R,R[$, leur somme $f+g$ et leur produit fg sont aussi sommes de séries entières convergentes dans le même intervalle.

I . La suite (u_n)

1) Démontrer, pour tout entier $n \geqslant 1$, l'existence d'une unique solution réelle $\geqslant 0$ de l'équation

$$(\mathrm{E}_n) \qquad x^n + x^{n-1} + \cdots + x - 1 = 0.$$

Cette solution est notée u_n. Démontrer que l'on a $0 \leqslant u_n \leqslant 1$.

2) Démontrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est strictement décroissante.

3) Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a

$$u_n^{n+1} - 2u_n + 1 = 0.$$

4) a) Calculer u_2.
   b) Démontrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ tend vers $\dfrac{1}{2}$.

5) Pour $n \geqslant 1$, on pose $\varepsilon_n = u_n - \dfrac{1}{2}$. Démontrer que $n\,\varepsilon_n$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

6) En déduire, à l'aide de la question (I.3), le développement asymptotique suivant de u_n, pour n tendant vers $+\infty$:

$$u_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4\,.\,2^n} + o\left(\frac{1}{2^n}\right).$$

7) a) Déterminer le plus petit entier $s \geqslant 1$ pour lequel on a

$$0 < u_s - \frac{1}{2} < 10^{-2}.$$

Pour cela, on pourra déterminer, avec une calculatrice, le signe de $f_n\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{100}\right)$ pour $n = 2, 3, \ldots$, où f_n est la fonction définie par

$$f_n(x) = x^n + x^{n-1} + \cdots + x - 1.$$

b) Écrire en français une procédure qui, pour un entier $p \geqslant 1$ donné, permet de déterminer le plus petit entier s pour lequel on a

$$0 < u_s - \frac{1}{2} \leqslant 10^{-p}.$$

On pourra utiliser les fonctions g_n définies par

$$g_n(x) = (x-1)\,f_n(x).$$

8) On se propose de démontrer l'inégalité suivante, valable pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$\text{(1)} \qquad u_n \leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}.$$

a) En utilisant la fonction g_n définie dans la question (I.7), démontrer que l'inégalité (1) est équivalente à l'inégalité suivante :

$$\text{(2)} \qquad \frac{1}{2^{n+1}} \leqslant \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}.$$

b) Pour $x > 0$, on pose

$$\psi(x) = (x+1)\ln(x+1) - x\ln(x) - (x+1)\ln(2).$$

Étudier la variation de la fonction ψ et en déduire l'inégalité (2).

9) a) Démontrer l'inégalité $\dfrac{1}{2} < u_4 < \dfrac{6}{11}$.

b) En déduire que l'on a, pour tout entier $n \geqslant 4$, l'inégalité

$$\frac{u_n}{2(1-u_n)} < \frac{n^{\frac{n}{n+1}}}{n+1}.$$

II . Expression de u_n comme somme d'une série

Dans cette partie, on se propose d'établir, lorsque l'entier p est assez grand, l'expression suivante de u_p comme somme d'une série convergente :

$$(\mathrm{T}_p) \qquad u_p = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,2^{n(p+1)+1}} \binom{n(p+1)}{n-1}.$$

1) Soit p un entier $\geqslant 1$. On note S_p la série entière définie par

$$\mathrm{S}_p(x) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{2n} \binom{n(p+1)}{n-1} x^n.$$

a) Démontrer que le rayon de convergence ρ_p de la série entière S_p est donné par

$$\rho_p = \frac{p^p}{(p+1)^{p+1}}.$$

b) Démontrer que, pour $p \geqslant 2$, la série du second membre de la relation (T_p) est convergente. [On utilisera la question (I.8).]

2) a) Démontrer, par récurrence sur l'entier $n \geqslant 1$, l'égalité

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\,2^{2k+1}} \binom{2k}{k-1} = \frac{1}{2} - \frac{2(n+2)}{(n+1)\,2^{2n+3}} \binom{2(n+1)}{n}.$$

b) En déduire la relation (T_1).

3) On a admis dans les Préliminaires que, pour tout entier $q \geqslant 1$, la série entière

$$\sum_{n\geqslant 0} (-1)^n \binom{n+q-1}{n} x^n$$

a un rayon de convergence égal à 1, et que, pour $x \in]-1,1[$, sa somme est égale à $1/(1+x)^q$.

En déduire, pour $n \geqslant 1$, $p \geqslant 1$ et $x \in]-1,1[$, l'égalité

$$\frac{x^n}{(1+x)^{n(p+1)}} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{n(p+1)+k-1}{k} x^{n+k}.$$

4) Pour $p \geqslant 1$, on pose

$$v_p = 2u_p - 1.$$

a) Démontrer que l'on a

$$\frac{v_p}{(1+v_p)^{p+1}} = \frac{1}{2^{p+1}}.$$

b) Déduire de ce qui précède que l'on a, pour $p \geqslant 2$ et $n \geqslant 1$, l'égalité

$$\frac{1}{2^{n(p+1)}} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{n(p+1)+k-1}{k} v_p^{n+k}.$$

5) **Dans toute la fin de cette deuxième partie, on fixe l'entier $p \geqslant 4$, et on pose**

$$a_{n,k} = \frac{(-1)^k}{2n} \binom{n(p+1)+k-1}{k} \binom{n(p+1)}{n-1} v_p^{n+k}.$$

a) Démontrer la relation

$$(\mathrm{U}_p) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,2^{n(p+1)+1}} \binom{n(p+1)}{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k} \right).$$

b) Démontrer que, pour tout $n \geqslant 1$, la série $\sum_{k\geqslant 0} |a_{n,k}|$ est convergente et déterminer sa somme.

c) En utilisant les questions (I.9) et (II.1), démontrer que la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} |a_{n,k}| \right)$ est convergente.

Propriétés qualitatives de certaines équations différentielles

Introduction

Ce problème présente des techniques permettant d'étudier les solutions d'équations différentielles, en général non linéaires, sans connaître explicitement ces solutions. Par conséquent, on ne cherchera pas à résoudre les équations différentielles qui apparaîtront au fil de l'épreuve, sauf si cela est demandé. Rappelons que, dans le cas d'une équation différentielle non linéaire, l'intervalle de définition d'une solution est lui aussi inconnu.

Définitions et notations

Pour tout entier $m > 0$, on munit l'espace vectoriel $\mathbf{R}^m$ du produit scalaire usuel

$$< x, y >= \sum_{1 \leqslant i \leqslant m} x_i y_i ;$$

la norme associée est notée $\|x\|$; on note $\mathrm{B}_f(x_0, \mathrm{R})$ la boule fermée de centre $x_0 \in \mathbf{R}^m$ et de rayon R.

Soient U une partie ouverte de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^m$, et f une application de U dans $\mathbf{R}^m$. On dit que l'application $u : \mathrm{I} \to \mathbf{R}^m$ est une solution de l'équation différentielle

$$\text{(E)} \qquad x' = f(t, x)$$

si :

a) I est un intervalle non trivial (ni vide, ni réduit à un point) de la droite réelle $\mathbf{R}$,

b) u est une application dérivable de I dans $\mathbf{R}^m$,

c) pour tout $t \in \mathrm{I}$, on a $(t, u(t)) \in \mathrm{U}$ et $u'(t) = f(t, u(t))$.

Soient $u_1 : \mathrm{I}_1 \to \mathbf{R}^m$ et $u_2 : \mathrm{I}_2 \to \mathbf{R}^m$ deux solutions de (E) ; on dit que u_1 est une *restriction* de u_2 si $\mathrm{I}_1 \subset \mathrm{I}_2$ et si, pour tout $t \in \mathrm{I}_1$, on a $u_1(t) = u_2(t)$. On dit aussi que u_2 est un *prolongement* de u_1, ou encore que u_2 *prolonge* u_1.

Une solution de (E) est dite *maximale* si elle n'admet pas d'autre prolongement qu'elle-même.

De manière générale $\mathrm{C}^n(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ désigne l'ensemble des applications de X dans Y de classe C^n, lorsque cela a un sens.

On dit que l'application f est *localement lipschitzienne* en x si, pour tout point (t_0, x_0) de U, il existe deux nombres réels ε et k tous deux > 0 et tels que :

a) l'ensemble $\mathrm{C} = [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \times \mathrm{B}_f(x_0, \varepsilon)$ soit inclus dans U,

b) si (t, x_1) et (t, x_2) sont deux points de C, on ait $\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leqslant k \|x_1 - x_2\|$.

On rappelle qu'une fonction $f \in \mathrm{C}^1(\mathrm{U}, \mathbf{R}^m)$ est localement lipschitzienne en x.

Les deux premières parties n'utilisent pas le théorème de Cauchy-Lipschitz, contrairement aux autres parties. L'énoncé de ce théorème est donné au début de la troisième partie.

Partie I

Soit q un nombre réel $\geqslant 0$ et soit u une application dérivable de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}^2$; pour $t \in \mathbf{R}$, on écrit $u(t) = (u_1(t), u_2(t))$. On suppose que la fonction u satisfait, sur $\mathbf{R}$, aux égalités

$$\begin{cases} u_1' &= u_2 , \\ u_2' &= -u_1 \quad -qu_1^3 . \end{cases}$$

L'existence d'une telle application u est admise ici.

1) Démontrer que u est solution d'une équation différentielle du type (E) en précisant bien quelle est l'application f.

2) Pour $q = 0$, déterminer l'application u et démontrer que l'image de l'arc $t \mapsto u(t)$ est un cercle. Représenter ceci sur un dessin, en n'oubliant pas de mentionner le sens de parcours.

3) Supposons $q > 0$

a) Démontrer qu'il existe un nombre réel p tel que l'image de u soit incluse dans la courbe

$$\mathrm{C}_p = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \mid x_1^2 + \frac{q}{2} x_1^4 + x_2^2 = p\}.$$

b) Démontrer que p est $\geqslant 0$. Que dire de u si $p = 0$?

On suppose désormais $p > 0$.

c) Représenter sommairement la courbe C_p dans un repère orthonormé du plan. Les tangentes aux points où la courbe C_p coupe les axes du repère doivent apparaître sur le dessin.

d) Démontrer qu'il existe deux fonctions $\rho, \theta \in \mathrm{C}^1(\mathbf{R}, \mathbf{R})$, avec $\rho > 0$, telles que, pour tout $t \in \mathbf{R}$, on ait

$$u_1(t) = \rho(t) \cos \theta(t) \qquad \text{et} \qquad u_2(t) = \rho(t) \sin \theta(t).$$

e) Calculer $\theta'(t)$ en fonction de ρ et θ, et en déduire que la trajectoire de u est exactement la courbe C_p.

Partie II : Barrières

Dans cette partie, on considère une partie ouverte U de $\mathbf{R}^2$ et une fonction $f \in \mathrm{C}^0(\mathrm{U}, \mathbf{R})$ localement lipschitzienne en x. On note toujours (E) l'équation différentielle $x' = f(t, x)$.

1) Soient a, b et K des nombres réels, avec $a < b$, et soit $h : [a, b] \to \mathbf{R}$ une fonction dérivable satisfaisant à $h(a) = 0$ et $h' \leqslant \mathrm{K}h$. Démontrer que h est $\leqslant 0$ [on pourra par exemple chercher une fonction φ telle que $(h' - \mathrm{K}h)\varphi$ soit la dérivée d'une fonction simple].

2) *Lemme de la barrière inférieure* : On suppose que I est un intervalle réel non trivial et $\alpha : \mathrm{I} \to \mathbf{R}$ une application dérivable telle que, pour tout $t \in \mathrm{I}$, le point $(t, \alpha(t))$ appartienne à U et que l'on ait l'inégalité

$$\alpha'(t) \leqslant f(t, \alpha(t)) .$$

On dit alors que α est une *barrière inférieure* de l'équation (E) sur l'intervalle I.

Soit $u : \mathrm{J} \to \mathbf{R}$ une solution de (E) et $t_0 \in \mathrm{I} \cap \mathrm{J}$. On suppose $\alpha(t_0) \leqslant u(t_0)$ et on veut démontrer que $\alpha(t) \leqslant u(t)$ pour $t \geqslant t_0$, $t \in \mathrm{I} \cap \mathrm{J}$. On procède par l'absurde et on suppose que cela est faux.

a) Démontrer qu'il existe t^* et t_1 dans $\mathrm{I} \cap \mathrm{J}$ tels que $t_0 \leqslant t_1 < t^*$ et que l'on ait

$$u(t_1) = \alpha(t_1) \quad \text{et} \quad u(t) < \alpha(t) \quad \text{pour} \quad t_1 < t \leqslant t^*.$$

b) Etablir l'existence de $t_2 \in]t_1, t^*]$ et d'un nombre réel $C \geqslant 0$ tels que, pour tout $t \in [t_1, t_2]$, on ait

$$|f(t, \alpha(t)) - f(t, u(t))| \leqslant C\,|\alpha(t) - u(t)|.$$

c) En déduire que l'on a $\alpha' - u' \leqslant C(\alpha - u)$ sur $[t_1, t_2]$. Trouver alors une contradiction et conclure.

3) *Exemple* : Prenons dans cette question $U = \mathbf{R}^2$ et $f(t, x) = x^2 + (\sin tx)^2$.

a) Vérifier que, pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$, l'application α de $]-\infty, \lambda[$ dans $\mathbf{R}$ définie par $\alpha(t) = 1/(\lambda - t)$ est une barrière inférieure de (E).

b) En déduire que, si $u : I \to \mathbf{R}$ est une solution de (E) et s'il existe un nombre réel t_0 tel que $u(t_0) > 0$, alors l'intervalle I est majoré.

4) De façon analogue, énoncer et démontrer le lemme de la barrière supérieure.

5) *Unicité.*

a) Déduire des résultats précédents que, si $u_1 : J_1 \to \mathbf{R}$ et $u_2 : J_2 \to \mathbf{R}$ sont deux solutions de (E) et s'il existe un nombre réel $t_0 \in J_1 \cap J_2$ tel que $u_1(t_0) = u_2(t_0)$, alors $u_1(t) = u_2(t)$ pour tout $t \in J_1 \cap J_2$.

b) Nous allons démontrer par un exemple que l'unicité est fausse lorsqu'on ne suppose plus la fonction f localement lipschitzienne en x. Posons $U = \mathbf{R}^2$ et prenons pour f l'application de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$ définie par $f(t, x) = \sqrt{|x|}$.

i) Prouver que la fonction f est continue. Est-elle localement lipschitzienne ?

ii) Décrire toutes les solutions strictement positives de (E).

iii) Raccorder de telles solutions avec la fonction nulle pour construire deux solutions de (E) qui coïncident en un point mais pas en tout point.

Partie III : Entonnoirs et anti-entonnoirs

Dans la suite du problème, on admet le *théorème de Cauchy-Lipschitz* :

Soient U *une partie ouverte de* $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^m$ *et* $f \in C^0(U, \mathbf{R}^m)$ *une fonction localement lipschitzienne en* x. *Soit* (t_0, x_0) *un point de* U ; *alors*

a) l'équation différentielle (E) *admet une solution maximale unique* $u : I \to \mathbf{R}^m$ *satisfaisant à* $u(t_0) = x_0$;

b) son ensemble de départ I *est un intervalle ouvert de* $\mathbf{R}$;

c) toute solution v *de* (E) *telle que* $v(t_0) = x_0$ *est une restriction de* u.

Dans cette partie, on prend $m = 1$ et on prend pour U le produit $]a, b[\times]c, d[$, où a, b, c, d désignent des nombres réels, ou $+\infty$, ou $-\infty$, et satisfont à $a < b$ et $c < d$. Soit $f \in C^0(U, \mathbf{R})$ une fonction localement lipschitzienne en x. On note toujours (E) l'équation différentielle $x' = f(t, x)$.

1) Soient p et q des nombres réels tels que $p < q$, et soit $g :]p, q[\to \mathbf{R}$ une fonction dérivable dont la dérivée est bornée. Démontrer que la fonction g admet une limite finie en q.

Introduction

On désigne par $\mathbf{R}$ le corps des nombres réels et par $\mathbf{C}$ le corps des nombres complexes.

Soit f une fonction définie sur $\mathbf{R}$, à valeurs réelles ou complexes, continue par morceaux sur tout segment de $\mathbf{R}$. Pour x et $y \in \mathbf{R}$, on pose $\mathrm{F}(x,y) = \int_x^y f(t)\, dt$.

On rappelle que, si la fonction f est réelle et positive, elle est intégrable sur $\mathbf{R}$ si la fonction F est bornée. L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt$ est alors égale à la borne supérieure de l'ensemble des nombres $\mathrm{F}(x,y)$, pour x et y parcourant $\mathbf{R}$. C'est aussi la limite de $\mathrm{F}(x,y)$ lorsque $x \to -\infty$ et $y \to \infty$.

Si la fonction f est à valeurs réelles ou complexes, elle est intégrable sur $\mathbf{R}$ si la fonction $|f|$ est intégrable. L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt$ est aussi égale à la limite de $\mathrm{F}(x,y)$ lorsque $x \to -\infty$ et $y \to \infty$.

Si E est une partie de $\mathbf{R}^n$, on appelle fonction *indicatrice* ou fonction *caractéristique* de E, et on note $\mathbf{1}_{\mathrm{E}}$, la fonction définie sur $\mathbf{R}^n$ par $\mathbf{1}_{\mathrm{E}}(x) = 1$ pour $x \in \mathrm{E}$, $\mathbf{1}_{\mathrm{E}}(x) = 0$ sinon.

L'objet de ce problème est la démonstration d'un résultat sur la mesure des polyèdres obtenus comme sections d'un cube par un hyperplan (partie V). La démonstration nécessite des résultats préliminaires d'analyse qui sont établis dans les parties I et II, ainsi qu'une majoration de l'intégrale $\mathrm{J}_b = \int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{\sin t}{t}\right|^b dt$ pour $b > 2$. Cette majoration est partiellement établie dans les parties III et IV.

Les cinq parties s'enchaînent logiquement. Chaque question peut être traitée en admettant les résultats établis dans les questions antérieures.

I . Transformation de Fourier

1) Soit f une fonction définie sur $\mathbf{R}$, à valeurs réelles, continue par morceaux sur tout segment de $\mathbf{R}$. On suppose que la fonction f est intégrable sur $\mathbf{R}$.

a) Démontrer que, pour tout $y \in \mathbf{R}$, la fonction $x \mapsto f(x)\, e^{-ixy}$ est intégrable sur $\mathbf{R}$.

b) On définit une nouvelle fonction, notée $\widehat{f}$, en posant, pour tout $y \in \mathbf{R}$:

$$\widehat{f}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-ixy}\, dx.$$

Démontrer que la fonction $\widehat{f}$ est bornée et continue.

2) a) Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$. Calculer $\widehat{f}(y)$ lorsque f est la fonction $\mathbf{1}_{[a,b]}$ indicatrice de l'intervalle $[a,b]$ de $\mathbf{R}$.

b) En déduire que, si A est un nombre réel > 0, et si χ_{A} désigne la fonction indicatrice de l'intervalle $[-\mathrm{A},\mathrm{A}]$ de $\mathbf{R}$, on a

$$\widehat{\chi}_{\mathrm{A}}(y) = \frac{2\sin \mathrm{A}y}{y} \qquad \text{pour} \quad y \in \mathbf{R},\ y \neq 0,$$

$$\widehat{\chi}_{\mathrm{A}}(0) = 2\,\mathrm{A}.$$

Tournez la page S.V.P.

II . Convolution

1) Soit A un nombre réel > 0, et soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbf{R}$, à valeurs réelles, nulles hors de l'intervalle $[-\mathrm{A}, \mathrm{A}]$ et continues sur cet intervalle. On définit une nouvelle fonction, notée $f * g$, en posant, pour tout $x \in \mathbf{R}$:

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\, g(x-y)\, dy.$$

a) Vérifier que l'intégrale définissant $f * g$ a un sens, et que la fonction $f * g$ est nulle hors de l'intervalle $[-2\mathrm{A}, 2\mathrm{A}]$.

b) Démontrer que la fonction $f * g$ est continue.

2) Démontrer l'égalité

$$\chi_{\mathrm{A}} * \chi_{\mathrm{A}} = 2\,\mathrm{A}\ \Delta_{2\mathrm{A}}$$

où χ_{A} désigne la fonction indicatrice de l'intervalle $[-\mathrm{A}, \mathrm{A}]$ de $\mathbf{R}$, et $\Delta_{2\mathrm{A}}$ la fonction définie par

$$\Delta_{2\mathrm{A}}(x) = 1 - \frac{|x|}{2\,\mathrm{A}} \quad \text{si} \quad -2\,\mathrm{A} \leqslant x \leqslant 2\,\mathrm{A}, \qquad \Delta_{2\mathrm{A}}(x) = 0 \quad \text{si} \quad |x| > 2\,\mathrm{A}.$$

3) Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé Ω. On suppose que les distributions de X et Y admettent des densités, notées f et g respectivement, qui sont des fonctions à support borné, continues par morceaux.

Démontrer que, si les variables aléatoires X et Y sont indépendantes, la distribution de la variable $\mathrm{X} + \mathrm{Y}$ admet pour densité la fonction $f * g$.

4) Soient f et g deux fonctions comme dans (II.1). Démontrer l'égalité

$$\widehat{(f * g)} = \widehat{f}\ \widehat{g}.$$

5) Dans la suite du problème, on utilisera le résultat suivant que l'on admettra :

Théorème de réciprocité de Fourier. — Soit f une fonction continue sur $\mathbf{R}$, à support borné, à valeurs réelles. On suppose de plus que la fonction $\widehat{f}$ est intégrable sur $\mathbf{R}$. Alors, pour tout $x \in \mathbf{R}$, on a

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(y)\, e^{ixy}\, dy.$$

III . Calculs d'intégrales

1) Soit b un nombre réel > 1. On pose $f_b(t) = \left| \dfrac{\sin t}{t} \right|^b$ pour t réel $\neq 0$, et $f_b(0) = 1$.

Démontrer que la fonction f_b est intégrable sur $\mathbf{R}$.

Dans la suite, on note J_b la valeur de l'intégrale $\mathrm{J}_b = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_b(t)\, dt$.

Tournez la page S.V.P.