Préparation à l'agrégation interne de mathématiques - Année 2011
Dimension finie, matrices et topologie - 9 novembre 2011

Cette fiche reprend les derniers exercices du 26 octobre ainsi que quelques autres (section 5).

3 En dimension finie

En dimension finie, par compacité de la boule unité, toutes les applications linéaires sont continues et les *sup* sont des *max* (ils sont atteints).
En particulier l'extraction d'un coefficient d'une matrice $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}) \to \mathbb{K} : A = (a_{ij}) \mapsto a_{ij}$ est une forme linéaire continue. Il en découle que la trace et le déterminant sont des applications continues de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$.
La transposition est continue, le produit matriciel également (en tant qu'application bilinéaire).

De plus, puisque l'ensemble des applications linéaires de E dans F est lui-même de dimension finie, toutes les normes sur $\mathcal{L}(E;F)$ sont équivalentes. On peut donc parler d'ouvert, de fermé, de compact,... dans $\mathcal{L}(E;F)$ (ou $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$) et $\mathcal{L}(E)$ (ou $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$).

Exercice 8. ***(normes d'endomorphismes en dimension finie)*** *On considère l'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$ muni d'une norme quelconque $\|.\|$ et une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vue comme un endomorphisme de $\mathbb{K}^n$.*

1. *Calculer la norme $|||A|||$ de A subordonnée à $\|.\|$ lorsque :*
   (a) $A = Id$
   (b) *A est une homothétie de rapport λ*
2. *La norme euclidienne définie par $\sqrt{\mathrm{tr}({}^tAA)}$ (exercice 2 du 12/10/2011) est-elle une norme subordonnée ?*
3. *Montrer que si p est un projecteur (non nul) alors $|||p||| \geqslant 1$.*
   Un projecteur de $(\mathbb{R}^2, \|.\|_1)$ de norme 2 ?

Exercice 9. ***(normes d'endomorphismes en dimension finie, suite)*** *Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vue comme un endomorphisme de $\mathbb{K}^n$.*

1. *Montrer que $|||A|||_\infty = \max\limits_i \sum\limits_j |a_{i,j}|$ (norme subordonnée à la norme $\|.\|_\infty$).*
2. *Montrer que $|||A|||_1 = \max\limits_j \sum\limits_i |a_{i,j}|$ (norme subordonnée à la norme $\|.\|_1$).*
3. *On suppose ici $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Soit $\rho(A) = max_i|\lambda_i|$ le rayon spectral de A (maximum du module des valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de A).*
   Montrer que, pour toute norme subordonnée $|||.|||$, on a $\rho(A) \leqslant |||A|||$.

Exercice 10. ***(convergence de suites de matrices)*** *On considère une suite $(A_n)_n$ de matrices $A_n = (a_n^{i,j})_{i,j}$ de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.*

1. *Démontrer que les propositions suivantes sont équivalentes :*
   (a) *La suite $(A_n)_n$ est convergente dans $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ (pour une/toute norme).*
   (b) *Les suites $(a_n^{i,j})_n$ convergent dans $\mathbb{K}$.*
   (c) *Quel que soit le vecteur v de $\mathbb{K}^q$, la suite $(A_n.v)_n$ est convergente dans $\mathbb{K}^p$ (pour une/toute norme).*
2. *Montrer que si ces propriétés sont vérifiées et si A désigne $\lim A_n$, alors $\lim(A_n.v) = A.v$ pour tout vecteur v de $\mathbb{K}^q$.*

4 Matrices diagonalisables, matrices inversibles

Exercice 11. ***(matrices diagonalisables)***

1. *On suppose* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$. *L'ensemble des matrices diagonalisables de* $\mathcal{M}_d(\mathbb{K})$ *est-il*
   (a) *un sous-espace vectoriel de* $\mathcal{M}_d(\mathbb{K})$ *?*
   (b) *stable par addition ?*
   (c) *stable par produit ?*
   (d) *ouvert ?*
   (e) *fermé ?*

   Indication : Les réponses sont « non ». On pourra exhiber des contre-exemples avec des matrices 2×2.
2. *On suppose ici* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. *Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables est dense dans* $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$. *En déduire une démonstration du théorème de Cayley-Hamilton.*
3. *On suppose ici* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. *Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables n'est pas dense dans* $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$.

Exercice 12. ***(matrices inversibles)*** *On suppose* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$.

1. *Montrer que le groupe* $\mathrm{GL}(d, \mathbb{K})$ *des matrices inversibles est un ouvert dense de* $\mathcal{M}_d(\mathbb{K})$.
2. *En utilisant le résultat précédent de densité, montrer que, si* A *et* B *appartiennent à* $\mathcal{M}_d(\mathbb{K})$, *alors les polynômes caractéristiques des matrices* AB *et* BA *sont égaux.*

Exercice 13. ***(boules ouvertes dans*** $\mathrm{GL}(d, \mathbb{K})$***)***

On suppose $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$. *Soit* $\|.\|$ *une norme subordonnée sur* $\mathcal{M}_d(\mathbb{K})$.

1. *Soit* A *une matrice de* $\mathcal{M}_d(\mathbb{K})$ *telle que* $\|A\| < 1$.
   (a) *Montrer que la série* $\sum_{k \geqslant 0} A^k$ *converge dans* $\mathcal{M}_d(\mathbb{K})$.
   (b) *En déduire que la matrice* $Id - A$ *est inversible puis le rayon maximal d'une boule ouverte de centre* Id *contenue dans* $\mathrm{GL}(d, \mathbb{K})$.
2. *En déduire que, pour toute matrice inversible* M, *la boule centrée en* M *et de rayon* $\frac{1}{\|M^{-1}\|}$ *est contenue dans* $\mathrm{GL}(d, \mathbb{K})$.
3. *Application : minoration d'une norme subordonnée par le rayon spectral.*
   Soit A *une matrice de* $\mathcal{M}_d(\mathbb{K})$
   (a) *Montrer que si* λ *est un nombre (réel ou complexe) vérifiant* $|\lambda| > \|A\|$ *alors* $A - \lambda.Id$ *est inversible.*
   (b) *En déduire que* $\rho(A) \leqslant \|A\|$ *où* $\rho(A)$ *désigne le maximum des modules des valeurs propres (réelles ou complexes) de* A.

5 Divers

Exercice 14. ***(attributs de matrices)***

1. *Justifier que l'application* $P : \mathcal{M}_d(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}_d[X]$ *qui associe à toute matrice* M *son polynôme caractéristique* P_M, *est continue.*
2. *L'application* $\mu : \mathcal{M}_d(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}_d[X]$ *qui associe à toute matrice* M *son polynôme minimal* μ_M, *est-elle continue ?*
3. *Justifier que l'application « inverse »* $\mathrm{GL}(d, \mathbb{K}) \longrightarrow \mathrm{GL}(d, \mathbb{K}) : M \longmapsto M^{-1}$ *est continue sur* $\mathrm{GL}(d, \mathbb{K})$.

Exercice 15. ***(matrices symétriques)*** *Sur $\mathbb{R}$, on note $\mathcal{S}$ (resp. $\mathcal{S}^+$, $\mathcal{S}^{++}$) l'ensemble des matrices carrées symétriques (resp. symétriques positives, symétriques définies positives) de taille d,*

1. *Montrer que $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}^+$ sont des sous-ensembles fermés de $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$.*
2. *Montrer que $\mathcal{S}^+$ est l'adhérence de $\mathcal{S}^{++}$.*

Exercice 16. ***(matrices de rang majoré)*** *On suppose $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.*
Soit r un entier naturel. Montrer que l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_d(\mathbb{K})$ de rang inférieur ou égal à r est un sous-ensemble fermé de $\mathcal{M}_d(\mathbb{K})$.
Indication : Utiliser des mineurs d'ordre $r+1$ pour montrer que le complémentaire de l'ensemble étudié est un ouvert.