Lycée La Martinière-Monplaisir

Préparation à l'agrégation interne de mathématiques

****

Partie I

On note $E =]-1\,;1[\times\mathbb{R}$, et on considère, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les applications u_n, v_n, $w_n : E \longrightarrow \mathbb{C}$ définies, pour tout $(r,t) \in E$, par :

$$u_n(r,t) = r^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}, \qquad v_n(r,t) = \frac{1}{n} r^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}, \qquad w_n(r,t) = \frac{1}{n^2} r^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}.$$

1. Montrer que les séries d'applications $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$, $\sum\limits_{n\geqslant 1} v_n$, $\sum\limits_{n\geqslant 1} w_n$, convergent simplement sur E. On note U, V, W leurs sommes respectives.

2. Montrer que les séries d'applications $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$, $\sum\limits_{n\geqslant 1} v_n$, $\sum\limits_{n\geqslant 1} w_n$, convergent uniformément sur toute partie compacte de E.

3.a. Calculer $U(r,t)$ pour tout $(r,t) \in E$.

3.b. Établir que V est de classe C^1 sur E et que, pour tout $(r,t) \in E$:

$$r\frac{\partial V}{\partial r}(r,t) = U(r,t) \quad \text{et} \quad \frac{\partial V}{\partial t}(r,t) = \mathrm{i}U(r,t).$$

3.c. Établir, pour tout $(r,t) \in E$:

$$V(r,t) = -\frac{1}{2}\ln(1 - 2r\cos t + r^2) + \mathrm{i}\,\mathrm{Arctan}\,\frac{r\sin t}{1 - r\cos t}$$

et en déduire, pour tout $(r,t) \in E$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} r^n \cos nt = -\frac{1}{2}\ln(1 - 2r\cos t + r^2) \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} r^n \sin nt = \mathrm{Arctan}\,\frac{r\sin t}{1 - r\cos t}.$$

4. Montrer que, pour tout $r \in]-1\,;1[$:

$$\int_0^{\pi} V(r,t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{i}\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{2r^{2p+1}}{(2p+1)^2}$$

et en déduire que, pour tout $r \in]-1\,;1[$:

$$\int_0^{\pi} \ln(1 - 2r\cos t + r^2)\,\mathrm{d}t = 0 \quad \text{et} \quad \int_0^{\pi} \mathrm{Arctan}\,\frac{r\sin t}{1 - r\cos t}\,\mathrm{d}t = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{2r^{2p+1}}{(2p+1)^2}.$$

5.a. Établir que W est de classe C^1 sur E et que, pour tout $(r,t) \in E$:

$$r\frac{\partial W}{\partial r}(r,t) = V(r,t) \quad \text{et} \quad \frac{\partial W}{\partial t}(r,t) = \mathrm{i}V(r,t).$$

$\boxed{\textbf{5.b.}}$ En déduire que, pour tout $(r,t) \in E$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} r^n \cos nt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r^n}{n^2} - \int_0^t \operatorname{Arctan} \frac{r \sin u}{1 - r\cos u} \, \mathrm{d}u$$

et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} r^n \sin nt = -\frac{1}{2} \int_0^t \ln(1 - 2r\cos u + r^2) \, \mathrm{d}u.$$

$\boxed{\textbf{Partie II}}$

$\boxed{\textbf{1.}}$ Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}$ diverge.

$\boxed{\textbf{2.a.}}$ Soit $t \in \mathbb{R} - 2\pi\mathbb{Z}$. Démontrer que la série d'applications $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \left(r \longmapsto \frac{1}{n} r^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt} \right)$ converge uniformément sur $[0\,;1]$. (On pourra utiliser la transformation d'Abel et le critère de Cauchy uniforme.)

$\boxed{\textbf{2.b.}}$ En déduire que, pour tout $t \in]0\,;2\pi[$, les séries de termes généraux $\dfrac{\cos nt}{n}$ et $\dfrac{\sin nt}{n}$ convergent et que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos nt}{n} = -\ln\left(2 \sin \frac{t}{2}\right) \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nt}{n} = \frac{\pi - t}{2}.$$

(On pourra utiliser des résultats de la partie I.)

$\boxed{\textbf{3.a.}}$ Montrer que la série d'applications $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \left(t \longmapsto \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}}{n} \right)$ converge uniformément sur toute partie compacte de $]0\,;2\pi[$.

$\boxed{\textbf{3.b.}}$ En déduire que, pour tout $t \in [0\,;2\pi]$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 - \cos nt}{n^2} = \frac{t(2\pi - t)}{4} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nt}{n^2} = -\int_0^t \ln\left(2 \sin \frac{u}{2}\right) \mathrm{d}u.$$

$\boxed{\textbf{3.c.}}$ Calculer $\displaystyle\int_0^{\pi} \ln\left(\sin \frac{u}{2}\right) \mathrm{d}u$.

$\boxed{\textbf{3.d.}}$ Tracer l'allure de la courbe représentative de la fonction $\varphi : t \longmapsto \varphi(t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nt}{n^2}$ lorsque $t \in [0\,;2\pi]$. On donne la valeur approchée : $\varphi\left(\dfrac{\pi}{3}\right) \simeq 1,01$.

$\boxed{\textbf{4.}}$ Calculer, pour tout $(x,y) \in [0\,;\pi]^2$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx \sin ny}{n^2}$.

$\boxed{\textbf{5.}}$ Soient a, b, c les longueurs des côtés d'un triangle du plan euclidien, de périmètre inférieur ou égal à π. Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin na \sin nb \sin nc}{n}$.

$\boxed{\text{Partie III}}$

On considère l'application $K : [0\,;\pi]^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout $(x,y) \in [0\,;\pi]^2$, par :

$$K(x,y) = \begin{cases} x(\pi - y) & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant y \leqslant \pi \\ y(\pi - x) & \text{si} \quad 0 \leqslant y \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$$

On note $\mathcal{C}$ l'espace vectoriel réel des applications continues de $[0\,;\pi]$ dans $\mathbb{R}$.

À toute $f \in \mathcal{C}$, on associe l'application $T(f) : [0\,;\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$T(f)(x) = \int_0^\pi K(x,y) f(y)\,\mathrm{d}y.$$

$\boxed{\textbf{1.}}$ Montrer que, pour toute $f \in \mathcal{C}$, on a $T(f) \in \mathcal{C}$, que $T(f)$ est de classe C^2 sur $[0\,;\pi]$ et que $T(f)$ est solution du problème :

$$g'' = -\pi f, \quad g(0) = g(\pi) = 0,$$

d'inconnue g.

$\boxed{\textbf{2.}}$ Vérifier que l'application $T : f \in \mathcal{C} \longrightarrow T(f) \in \mathcal{C}$ est linéaire. Est-elle injective? surjective?

$\boxed{\textbf{3.}}$ On munit, dans cette question, l'espace vectoriel $\mathcal{C}$ de la norme $||.||_\infty$, définie par :

$$\forall\, f \in \mathcal{C}, \quad ||f||_\infty = \operatorname*{Sup}_{x \in [0\,;\pi]} |f(x)|.$$

Montrer que T est linéaire continue et calculer sa norme, définie par :

$$|||T||| = \operatorname*{Sup}_{f \in \mathcal{C} - \{0\}} \frac{||T(f)||_\infty}{||f||_\infty}.$$

Soit $f \in \mathcal{C}$. On note $g = T(f)$, et on considère les applications f^*, $g^* : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, impaires, 2π-périodiques, et coïncidant respectivement avec f et g sur $]0\,;\pi[$.

$\boxed{\textbf{4.a.}}$ Établir : $\quad \forall\, x \in [0\,;\pi], \quad T(f)(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\pi b_n(f^*)}{n^2} \sin nx,$

où, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\quad b_n(f^*) = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f^*(y) \sin ny\,\mathrm{d}y.$

(On pourra utiliser un résultat de la partie II.)

$\boxed{\textbf{4.b.}}$ En déduire : $\quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad b_n(g^*) = \dfrac{\pi}{2n^2} b_n(f^*).$

$\boxed{\textbf{5.}}$ Établir :

$$\int_0^\pi (f(t))^2\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (b_n(f^*))^2 \quad \text{et} \quad \int_0^\pi (T(f)(t))^2\,\mathrm{d}t = \frac{\pi^3}{8} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(b_n(f^*))^2}{n^4}.$$

$\boxed{\textbf{6.}}$ Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de l'endomorphisme T de $\mathcal{C}$.

* * * * * * * * * * * * * * * * * * *