Lycée La Martinière-Monplaisir

Préparation à l'agrégation interne de mathématiques

Corrigé de l'épreuve du samedi 27 novembre 2010

Partie I

1. On a :

$$\forall (r,t) \in E, \quad |u_n(r,t)| = |r|^n.$$

Soit $(r,t) \in E$. Comme $|r| < 1$, la série géométrique $\sum_{n \geqslant 1} |r|^n$ converge. Donc, par théorème de majoration pour des séries à termes réels positifs ou nuls, la série $\sum_{n \geqslant 1} |u_n(r,t)|$ converge. Ainsi, la série $\sum_{n \geqslant 1} u_n(r,t)$ converge absolument, donc simplement.

De même :

$$\forall (r,t) \in E, \quad \left(|v_n(r,t)| = \frac{1}{n}|r|^n \leqslant |r|^n \quad \text{et} \quad |w_n(r,t)| = \frac{1}{n^2}|r|^n \leqslant |r|^n \right),$$

et on conclut de la même façon.

$$\boxed{\text{Les séries } \sum_{n \geqslant 1} u_n,\ \sum_{n \geqslant 1} v_n,\ \sum_{n \geqslant 1} w_n, \text{ convergent absolument, donc simplement, sur } E}$$

2. Soit K une partie compacte de E. Comme les projections pr_1 et pr_2 sont continues, $\mathrm{pr}_1(K)$ est un compact de $]-1\,;1[$ et $\mathrm{pr}_2(K)$ est un compact de $\mathbb{R}$. Il existe donc $\rho \in [0\,;1[$ et $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a \leqslant b$ et que : $K \subset [-\rho\,;\rho] \times [a\,;b]$.

On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \forall (r,t) \in K, \quad |u_n(r,t)| = |r|^n \leqslant \rho^n,$$

donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \operatorname*{Sup}_{(r,t) \in K} |u_n(r,t)| \leqslant \rho^n.$$

Comme $\rho \in [0\,;1[$, la série géométrique $\sum_{n \geqslant 1} \rho^n$ converge, et donc la série $\sum_{n \geqslant 1} u_n$ converge normalement, donc uniformément, sur K.

De même pour v_n et pour w_n.

On conclut :

$$\boxed{\text{Les séries } \sum_{n \geqslant 1} u_n,\ \sum_{n \geqslant 1} v_n,\ \sum_{n \geqslant 1} w_n, \text{ convergent uniformément sur toute partie compacte de } E}$$

3.a. On a, pour tout $(r,t) \in E$:

$$U(r,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} r^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,nt} = \sum_{n=1}^{+\infty} (r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t})^n = -1 + \sum_{n=0}^{+\infty} (r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t})^n = -1 + \frac{1}{1 - r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t}} = \frac{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t}}{1 - r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t}}.$$

$$\boxed{\forall (r,t) \in E, \quad U(r,t) = \frac{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t}}{1 - r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t}}}$$

3.b. *1)* Soit $t \in \mathbb{R}$ fixé.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'application $v_n(\cdot, t) : r \longmapsto v_n(r,t) = \dfrac{1}{n} r^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,nt}$ est de classe C^1 sur $]-1\,;1[$ et :
$$\forall\, r \in]-1\,;1[, \quad \big(v_n(\cdot, t)\big)'(r) = r^{n-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,nt}.$$

- La série d'applications $\sum\limits_{n\geqslant 1} \Big(r \longmapsto r^{n-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,nt}\Big)$ converge uniformément sur toute partie compacte de $]-1\,;1[$, comme dans 2., l'exposant $n-1$ au lieu de n ne modifiant pas le raisonnement.

- La série d'applications $\sum\limits_{n\geqslant 1} v_n(\cdot, t)$ converge simplement sur $]-1\,;1[$, d'après 1.

D'après le théorème de dérivation pour une série d'applications, on conclut que $V(\cdot, t)$ est de classe C^1 sur $]-1\,;1[$ et que :

$$\forall\, r \in]-1\,;1[, \quad \big(V(\cdot, t)\big)'(r) = \sum_{n=1}^{+\infty} r^{n-1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,nt}.$$

Ceci montre que $\dfrac{\partial V}{\partial r}$ existe sur E et que :

$$\forall\,(r,t) \in E, \quad r\frac{\partial V}{\partial r}(r,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} r^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,nt} = U(r,t).$$

2) Soit $r \in]-1\,;1[$ fixé.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'application $v_n(r, \cdot) : t \longmapsto v_n(r,t) = \dfrac{1}{n} r^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,nt}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, et :
$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \big(v_n(r, \cdot)\big)'(t) = \mathrm{i}\, r^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,nt} = \mathrm{i}\, u_n(r,t).$$

- La série d'applications $\sum\limits_{n\geqslant 1} \mathrm{i}\, u_n(r, \cdot)$ converge uniformément sur toute partie compacte de $\mathbb{R}$, d'après 2.

- La série d'applications $\sum\limits_{n\geqslant 1} v_n(r, \cdot)$ converge simplement sur $\mathbb{R}$, d'après 1.

D'après le théorème de dérivation pour une série d'applications, on conclut que $V(r, \cdot)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et que :

$$\forall\,(r,t) \in E, \quad \big(V(r, \cdot)\big)'(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{i}\, u_n(r,t) = \mathrm{i}\, U(r,t).$$

Ceci montre que $\dfrac{\partial V}{\partial t}$ existe sur E et que :

$$\forall\,(r,t) \in E, \quad \frac{\partial V}{\partial t}(r,t) = \mathrm{i}\, U(r,t).$$

3) Puisque chaque u_n est continue sur E et que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge uniformément sur toute partie compacte de E (d'après 2.), d'après le théorème sur la continuité pour une série d'applications, on déduit que U est continue sur E.

Puisque U est continue sur E, d'après les résultats obtenus ci-dessus, les dérivées partielles premières de V sont continues sur E (l'exposant $n-1$ au lieu de n ne modifiant pas le raisonnement), et finalement V est de classe C^1 sur E.

On conclut que V est de classe C^1 sur E et que, pour tout $(r,t) \in E$:

$$\boxed{r\frac{\partial V}{\partial r}(r,t) = U(r,t) \quad \text{et} \quad \frac{\partial V}{\partial t}(r,t) = \mathrm{i}\, U(r,t)}$$

$\boxed{\textbf{3.c.}}$ D'après *a)* et *b)*, on a, pour tout $(r,t)\in E$:

$$\frac{\partial V}{\partial t}(r,t) = \mathrm{i}\,U(r,t) = \mathrm{i}\,\frac{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t}}{1-r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t}} = \frac{\mathrm{i}\,r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t}(1-r\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,t})}{(1-r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t})(1-r\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,t})}$$
$$= \frac{\mathrm{i}\,r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t} - \mathrm{i}\,r^2}{1-2r\cos t + r^2} = \frac{-r\sin t}{1-2r\cos t+r^2} + \mathrm{i}\,\frac{r\cos t - r^2}{1-2r\cos t + r^2}.$$

Pour $r\in\,]-1\,;1[$ fixé, on intègre par rapport à t :

$$\forall\,(r,t)\in E,\quad V(r,t) = V(r,0) + \int_0^t \frac{\partial V}{\partial t}(r,u)\,\mathrm{d}u.$$

D'une part, d'après une développement en série entière du cours :

$$V(r,0) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{r^n}{n} = -\ln(1-r).$$

D'autre part :

$$\int_0^t \frac{\partial V}{\partial t}(r,u)\,\mathrm{d}u = \int_0^t \frac{-r\sin u}{1-2r\cos u + r^2}\,\mathrm{d}u + \mathrm{i}\,\int_0^t \frac{r\cos u - r^2}{1-2r\cos u+r^2}\,\mathrm{d}u.$$

Le calcul de la première intégrale est immédiat :

$$\int_0^t \frac{-r\sin u}{1-2r\cos u+r^2}\,\mathrm{d}u = \Big[-\frac{1}{2}\ln(1-2r\cos u + r^2)\Big]_0^t = -\frac{1}{2}\ln(1-2r\cos t + r^2) + \ln(1-r).$$

Pour la deuxième :

$$\int_0^t \frac{r\cos u - r^2}{1-2r\cos u + r^2}\,\mathrm{d}u = \int_0^t \frac{r\cos u - r^2}{(1-r\cos u)^2 + r^2\sin^2 u}\,\mathrm{d}u = \int_0^t \frac{\dfrac{r\cos u - r^2}{(1-r\cos u)^2}}{\Big(\dfrac{r\sin u}{1-r\cos u}\Big)^2+1}\,\mathrm{d}u.$$

Par le changement de variable défini par $v = \dfrac{r\sin u}{1-r\cos u}$, on a :

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = \frac{r\cos u(1-r\cos u) - r^2\sin^2 u}{(1-r\cos u)^2} = \frac{r\cos u - r^2}{(1-r\cos u)^2},$$

et donc :

$$\int_0^t \frac{r\cos u - r^2}{1-2r\cos u + r^2}\,\mathrm{d}u = \int_0^{\frac{r\sin t}{1-r\cos t}} \frac{\mathrm{d}v}{1+v^2} = \mathrm{Arctan}\,\frac{r\sin t}{1-r\cos t}.$$

On conclut :

$$\boxed{\forall\,(r,t)\in E,\quad V(r,t) = -\frac{1}{2}\ln(1-2r\cos t + r^2) + \mathrm{i}\,\mathrm{Arctan}\,\frac{r\sin t}{1-r\cos t}.}$$

Comme d'autre part :

$$\forall\,(r,t)\in E,\quad V(r,t) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}r^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,nt} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}r^n\cos nt + \mathrm{i}\,\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}r^n\sin nt,$$

on déduit, en prenant la partie réelle et la partie imaginaire, que, pour tout $(r,t)\in E$:

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}r^n\cos nt = -\frac{1}{2}\ln(1-2r\cos t + r^2) \quad\text{et}\quad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}r^n\sin nt = \mathrm{Arctan}\,\frac{r\sin t}{1-r\cos t}}$$

4. Soit $r \in]-1\,;1[$ fixé.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'application $v_n(r,\cdot)$ est continue sur $[0\,;\pi]$, et la série d'applications $\sum_{n\geqslant 1} v_n(r,\cdot)$ converge uniformément sur $[0\,;\pi]$, d'après 2. On peut donc, d'après un théorème du cours, permuter intégrale et série, d'où :

$$\int_0^\pi V(r,t)\,\mathrm{d}t = \int_0^\pi \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} v_n(r,t)\Big)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty}\Big(\int_0^\pi v_n(r,t)\,\mathrm{d}t\Big) = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^\pi \frac{1}{n}r^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,nt}\,\mathrm{d}t$$
$$= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{r^n}{n}\Big[\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,nt}}{\mathrm{i}\,n}\Big]_0^\pi = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{r^n}{\mathrm{i}\,n^2}\big((-1)^n-1\big) = -\,\mathrm{i}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\big((-1)^n-1\big)r^n}{n^2} = \mathrm{i}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{2r^{2p+1}}{(2p+1)^2},$$

puisque les termes d'indices pairs sont tous nuls.

En séparant partie réelle et partie imaginaire, on conclut que, pour tout $r \in]-1\,;1[$:

$$\boxed{\int_0^\pi \ln(1-2r\cos t+r^2)\,\mathrm{d}t = 0 \quad \text{et} \quad \int_0^\pi \mathrm{Arctan}\,\frac{r\sin t}{1-r\cos t}\,\mathrm{d}t = \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{2r^{2p+1}}{(2p+1)^2}}$$

5.a. Par le même raisonnement qu'en 3.b., on montre que W est de classe C^1 sur E et que, pour tout $(r,t) \in E$:

$$\boxed{r\frac{\partial W}{\partial r}(r,t) = V(r,t) \quad \text{et} \quad \frac{\partial W}{\partial t}(r,t) = \mathrm{i}\,V(r,t)}$$

5.b. Soit $r \in]-1\,;1[$ fixé.

On a, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
W(r,t) &= W(r,0) + \int_0^t \frac{\partial W}{\partial t}(r,u)\,\mathrm{d}u \\
&= W(r,0) + \mathrm{i}\int_0^t V(r,u)\,\mathrm{d}u \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{r^n}{n^2} + \mathrm{i}\int_0^t \Big(-\frac{1}{2}\ln(1-2r\cos u+r^2) + \mathrm{i}\,\mathrm{Arctan}\,\frac{r\sin u}{1-r\cos u}\Big)\,\mathrm{d}u \\
&= \Big(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{r^n}{n^2} - \int_0^t \mathrm{Arctan}\,\frac{r\sin u}{1-r\cos u}\,\mathrm{d}u\Big) + \mathrm{i}\int_0^t -\frac{1}{2}\ln(1-2r\cos u+r^2)\,\mathrm{d}u.
\end{aligned}$$

On déduit, en séparant partie réelle et partie imaginaire :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}r^n\cos nt = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{r^n}{n^2} - \int_0^t \mathrm{Arctan}\,\frac{r\sin u}{1-r\cos u}\,\mathrm{d}u \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}r^n\sin nt = -\frac{1}{2}\int_0^t \ln(1-2r\cos u+r^2)\,\mathrm{d}u}$$

Partie II

$\boxed{\textbf{1.}}$ Soit $t \in \mathbb{R}$. Puisque : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,nt}| = 1,$ la suite $(\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,nt})_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas vers 0, et donc la série $\sum_{n\geqslant 1} \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,nt}$ diverge (grossièrement).

$\boxed{\textbf{2.a.}}$ • Soit $r \in [0\,;1]$.

Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \dfrac{r^n}{n}$ et $b_n = \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,nt}$, et, pour tout $(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $q \geqslant p+1$, $\sigma_{p,q} = \displaystyle\sum_{n=p+1}^{q} b_n$.

On a, par la transformation d'Abel :

$$\sum_{n=p+1}^{q} a_n b_n = a_q \sigma_{p,q} + \sum_{n=p+1}^{q-1} (a_n - a_{n+1})\sigma_{p,n}.$$

Remarquons que :

$$|\sigma_{p,q}| = \Big|\sum_{n=p+1}^{q} \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,nt}\Big| = \Big|\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,(p+1)t}\sum_{\ell=0}^{q-p-1} \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\ell t}\Big| = \Big|\sum_{\ell=0}^{q-p-1} \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\ell t}\Big| = \Big|\frac{1-\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,(q-p)t}}{1-\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,t}}\Big| \leqslant \frac{2}{|1-\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,t}|}.$$

On a donc :

$$\Big|\sum_{n=p+1}^{q} \frac{r^n}{n}\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,nt}\Big| \leqslant \Big(a_q + \sum_{n=p+1}^{q-1}(a_n - a_{n+1})\Big)\frac{2}{|1-\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,t}|} = \frac{2a_{p+1}}{|1-\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,t}|} = \frac{2r^{p+1}}{(p+1)|1-\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,t}|} \leqslant \frac{2}{|1-\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,t}|}\,\frac{1}{p+1}.$$

• On obtient ainsi :

$$\forall\, r \in [0\,;1], \quad \forall\,(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2 \ (q \geqslant p+1), \quad \Big|\sum_{n=p+1}^{q} \frac{r^n}{n}\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,nt}\Big| \leqslant \frac{2}{|1-\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,t}|}\,\frac{1}{p+1}.$$

D'après le critère de Cauchy uniforme, il en résulte que la série d'applications $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\Big(r \longmapsto \frac{r^n \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,nt}}{n}\Big)$ converge uniformément sur $[0\,;1]$.

$\boxed{\textbf{2.b.}}$ Soit $t \in]0\,;2\pi[$ fixé.

D'après a. et puisque chaque application $r \longmapsto \dfrac{r^n}{n}\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,nt}$ est continue sur $[0\,;1]$, la somme de cette série d'applications est continue en 1, c'est-à-dire :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r^n}{n}\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,nt} \underset{r\,\longrightarrow\,1^-}{\longrightarrow} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,nt}}{n}.$$

D'autre part, d'après I.3.c. :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{r^n}{n}\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,nt} = -\frac{1}{2}\ln(1-2r\cos t + r^2) + \,\mathrm{i}\,\mathrm{Arctan}\,\frac{r\sin t}{1-r\cos t} \underset{r\,\longrightarrow\,1^-}{\longrightarrow} -\frac{1}{2}\ln(2-2\cos t) + \,\mathrm{i}\,\mathrm{Arctan}\,\frac{\sin t}{1-\cos t}.$$

En séparant partie réelle et partie imaginaire, il en résulte que les séries $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\cos nt}{n}$ et $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin nt}{n}$ convergent et que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos nt}{n} = -\frac{1}{2}\ln(2-2\cos t) = -\frac{1}{2}\ln\Big(4\sin^2\frac{t}{2}\Big) = -\ln\Big(\sin\frac{t}{2}\Big)$$

et

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nt}{n} &= \operatorname{Arctan}\frac{\sin t}{1-\cos t} = \operatorname{Arctan}\frac{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}}\\ &= \operatorname{Arctan}\Big(\operatorname{cotan}\frac{t}{2}\Big) = \operatorname{Arctan}\Big(\tan\Big(\frac{\pi}{2}-\frac{t}{2}\Big)\Big) = \frac{\pi-t}{2},\end{aligned}$$

puisque $\frac{\pi-t}{2} \in \Big]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\Big[$.

On conclut que, pour tout $t \in]0\,;2\pi[$:

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos nt}{n} = -\ln\Big(2\sin\frac{t}{2}\Big) \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nt}{n} = \frac{\pi-t}{2}}$$

3.a. Soit K une partie compacte de $]0\,;2\pi[$. Il existe $a \in]0\,;\pi]$ tel que : $K \subset [a\,;2\pi-a]$.
On a vu, dans la résolution de 2.a., que, pour tout $(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $q \geqslant p+1$ et tout $t \in]0\,;2\pi[$:

$$\Big|\sum_{n=p+1}^{q} \frac{\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,nt}}{n}\Big| \leqslant \frac{2}{|1-\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,t}|}\,\frac{1}{p+1}.$$

Il en résulte que, pour tout $(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $q \geqslant p+1$:

$$\forall t \in K,\quad \Big|\sum_{n=p+1}^{q} \frac{\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,nt}}{n}\Big| \leqslant \frac{2}{|1-\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,a}|}\,\frac{1}{p+1},$$

et donc :

$$\operatorname*{Sup}_{t\in K}\Big|\sum_{n=p+1}^{q} \frac{\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,nt}}{n}\Big| \leqslant \frac{2}{|1-\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,a}|}\,\frac{1}{p+1}.$$

Comme $\frac{1}{p+1} \underset{p\,\longrightarrow\,\infty}{\longrightarrow} 0,$, il en résulte que la série d'applications $\sum_{n\geqslant 1}\Big(t \longmapsto \frac{\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,nt}}{n}\Big)$ satisfait le critère de Cauchy uniforme, et on conclut :

$$\boxed{\text{La série } \sum_{n\geqslant 1}\Big(t \longmapsto \frac{\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,nt}}{n}\Big) \text{ converge uniformément sur toute partie compacte de }]0\,;2\pi[.}$$

3.b. *1)* • Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'application $t \longmapsto \frac{\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,nt}}{n^2}$ est de classe C^1 sur $]0\,;2\pi[$.

• La série-dérivée $\sum_{n\geqslant 1}\Big(t \longmapsto \frac{\mathrm{i}}{n}\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,nt}\Big)$ converge uniformément sur toute partie compacte de $]0\,;2\pi[$, d'après 3.a.

• La série $\sum_{n\geqslant 1}\Big(t \longmapsto \frac{\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,nt}}{n^2}\Big)$ converge simplement sur $]0\,;2\pi[$.

D'après le théorème de dérivation pour une série d'applications, il s'ensuit que la somme de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,nt}}{n^2}$ est de classe C^1 sur $]0\,;2\pi[$ et que l'on peut dériver terme à terme, d'où, pour tout $t \in]0\,;2\pi[$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,nt}}{n^2}\Big) = \mathrm{i}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,nt}}{n}.$$

2) D'autre part, chaque application $t \longmapsto \dfrac{e^{int}}{n^2}$ est continue sur $[0\,;2\pi]$ et la série d'applications $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\Big(t \longmapsto \frac{e^{int}}{n^2}\Big)$ converge normalement, donc uniformément, sur $[0\,;2\pi]$, donc sa somme est continue sur $[0\,;2\pi]$.

On a donc, pour tout $t \in [0\,;2\pi]$:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{int}}{n^2} &= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}+\int_0^t i\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{e^{inu}}{n}\,du\\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}+i\int_0^t\Big(-\ln\Big(2\sin\frac{u}{2}\Big)+i\Big(\frac{\pi-u}{2}\Big)\Big)\,du\\ &= \Big(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}-\int_0^t\Big(\frac{\pi-u}{2}\Big)\,du\Big)-i\int_0^t\ln\Big(2\sin\frac{u}{2}\Big)\,du.\end{aligned}$$

En séparant partie réelle et partie imaginaire, on obtient :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1-\cos nt}{n^2}=\int_0^t\Big(\frac{\pi-u}{2}\Big)\,du=\Big[\frac{\pi u}{2}-\frac{u^2}{4}\Big]_0^t=\frac{\pi t}{2}-\frac{t^2}{4}=\frac{t(2\pi-t)}{4}$$

et finalement :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1-\cos nt}{n^2}=\frac{t(2\pi-t)}{4}\quad\text{et}\quad\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin nt}{n^2}=-\int_0^t\ln\Big(2\sin\frac{u}{2}\Big)\,du}$$

$\boxed{\textbf{3.c.}}$ D'après b., en remplaçant t par π, on a : $\displaystyle -\int_0^{\pi}\ln\Big(2\sin\frac{u}{2}\Big)\,du=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin n\pi}{n^2}=0,$

d'où : $$\int_0^{\pi}\ln\Big(\sin\frac{u}{2}\Big)\,du=-\pi\ln 2+\int_0^{\pi}\ln\Big(\sin\frac{u}{2}\Big)\,du=-\pi\ln 2.$$

On conclut :

$$\boxed{\int_0^{\pi}\ln\Big(\sin\frac{u}{2}\Big)\,du=-\pi\ln 2}$$

$\boxed{\textbf{3.d.}}$ D'après b., on a : $\displaystyle \forall t\in\,]0\,;2\pi[,\quad \varphi(t)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin nt}{n^2}=-\int_0^t\ln\Big(2\sin\frac{u}{2}\Big)\,du,$

et $\varphi(0)=\varphi(2\pi)=0$.

On a, pour tout $t\in\,]0\,;2\pi[$: $\displaystyle \varphi(2\pi-t)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(2\pi n-nt)}{n^2}=-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin nt}{n^2}=-\varphi(t),$

donc la courbe représentative de φ admet le point de coordonnées $(\pi,0)$ pour centre de symétrie.

On a vu que φ est continue sur $[0\,;\pi]$ et de classe C^1 sur $]0\,;\pi]$. On a, pour tout $t\in\,]0\,;\pi]$:

$$\varphi'(t)=-\ln\Big(2\sin\frac{t}{2}\Big),$$

donc : $$\varphi'(t)=0\iff 2\sin\frac{t}{2}=1\iff\sin\frac{t}{2}=\frac{1}{2}\iff\frac{t}{2}=\frac{\pi}{6}\iff t=\frac{\pi}{3},$$

et on déduit aussi le signe de φ', ce qui permet de dresser le tableau des variations de φ sur $[0\,;\pi]$.

De plus, φ est de classe C^2 sur $]0\,;2\pi[$ et, pour tout $t\in\,]0\,;2\pi[$: $\displaystyle \varphi''(t)=-\frac{1}{2}\operatorname{cotan}\frac{t}{2},$

donc la courbe admet le point $(\pi,0)$ comme point d'inflexion et on déduit le sens de la concavité.

4. Soit $(x, y) \in [0\,;\pi]^2$. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$2\frac{\sin nx \sin ny}{n^2} = \frac{1}{n^2}\cos n(x-y) - \frac{1}{n^2}\cos n(x+y) = \frac{1}{n^2}\big(1-\cos n(x+y)\big) - \frac{1}{n^2}\big(1-\cos n(x-y)\big),$$

d'où, les séries manipulées étant convergentes :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 2\frac{\sin nx \sin ny}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1-\cos n(x+y)}{n^2} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1-\cos n(x+y)}{n^2}.$$

Si $0 \leqslant y \leqslant x \leqslant \pi$, alors $x+y$ et $x-y$ sont dans $[0\,;2\pi]$, d'où, d'après 3.b. :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} 2\frac{\sin nx \sin ny}{n^2} = \frac{x+y}{2}\Big(\pi - \frac{x+y}{2}\Big) - \frac{x-y}{2}\Big(\pi - \frac{x-y}{2}\Big) = y(\pi - x).$$

Par rôles symétriques, si $0 \leqslant x \leqslant y \leqslant \pi$, la somme étudiée est égale à $x(\pi - y)$.
On conclut :

$$\boxed{\forall\,(x,y) \in [0\,;\pi]^2, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} 2\frac{\sin nx \sin ny}{n^2} = \begin{cases} x(\pi - y) & \text{si} \quad 0 \leqslant x \leqslant y \leqslant \pi \\ y(\pi - x) & \text{si} \quad 0 \leqslant y \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}}$$

5. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
\sin na \sin nb \sin nc &= \frac{1}{2}\sin na\big(\cos n(b-c) - \cos n(b+c)\big) \\
&= \frac{1}{2}\sin na \cos n(b-c) - \frac{1}{2}\sin na \cos n(b+c) \\
&= \frac{1}{4}\sin n(a+b-c) + \frac{1}{4}\sin n(a-b+c) - \frac{1}{4}\sin n(a+b+c) - \frac{1}{4}\sin n(a-b-c) \\
&= \frac{1}{4}\sin n(a+b-c) + \frac{1}{4}\sin n(c+a-b) + \frac{1}{4}\sin n(b+c-a) - \frac{1}{4}\sin n(a+b+c).
\end{aligned}$$

D'après les hypothèses, on a :

$$0 \leqslant a \leqslant b+c, \quad 0 \leqslant b \leqslant c+a, \quad 0 \leqslant c \leqslant a+b, \quad a+b+c \leqslant \pi,$$

donc les réels $a+b-c$, $c+a-b$, $b+c-a$, $a+b+c$ sont tous dans $[0\,;\pi]$, donc les séries envisagées convergent et on a, d'après 2.b. :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin na \sin nb \sin nc}{n} = \frac{1}{4}\Big(\frac{\pi - (a+b-c)}{2} + \frac{\pi - (c+a-b)}{2} + \frac{\pi - (b+c-a)}{2} - \frac{\pi - (a+b+c)}{2}\Big) = \frac{\pi}{4}.$$

On conclut que, sous les conditions de l'énoncé :

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin na \sin nb \sin nc}{n} = \frac{\pi}{4}}$$

Partie III

$\boxed{\textbf{1.}}$ • Pour tout $x \in [0\,;\pi]$, l'application $y \longmapsto K(x,y)f(y)$ est continue sur $[0\,;\pi]$, donc l'intégrale donnant $T(f)(x)$ existe.

• On a, pour tout $x \in [0\,;\pi]$:

$$\begin{aligned} T(f)(x) &= \int_0^\pi K(x,y)f(y)\,\mathrm{d}y \\ &= \int_0^x y(\pi - x)f(y)\,\mathrm{d}y + \int_x^\pi x(\pi - y)f(y)\,\mathrm{d}y \\ &= (\pi - x)\int_0^x yf(y)\,\mathrm{d}y + x\int_x^\pi (\pi - y)f(y)\,\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

Puisque f est continue, les deux intégrales ci-dessus sont des fonctions de classe C^1 de la variable x, donc $T(f)$ est de classe C^1 sur $[0\,;\pi]$ et, pour tout $x \in [0\,;\pi]$:

$$\begin{aligned} \big(T(f)\big)'(x) &= -\int_0^x yf(y)\,\mathrm{d}y + (\pi - x)xf(x) + \int_x^\pi (\pi - y)f(y)\,\mathrm{d}y - x(\pi - x)f(x) \\ &= -\int_0^x yf(y)\,\mathrm{d}y + \int_x^\pi (\pi - y)f(y)\,\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

Par le même raisonnement que plus haut, $T(f)$ est de classe C^2 sur $[0\,;\pi]$ et, pour tout $x \in [0\,;\pi]$:

$$\big(T(f)\big)''(x) = -xf(x) - (\pi - x)f(x) = -\pi f(x).$$

• Enfin, comme :

$$\forall\, y \in [0\,;\pi], \quad K(0,y) = K(\pi,y) = 0,$$

on a : $T(f)(0) = T(f)(\pi) = 0$.

Finalement :

$$\boxed{T(f) \text{ est de classe } C^2 \text{ sur } [0\,;\pi] \text{ et : } \big(T(f)\big)'' = -\pi f, \quad T(f)(0) = T(f)(\pi) = 0}$$

$\boxed{\textbf{2.}}$ • La linéarité de T est immédiate; en effet, si $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f, g \in \mathcal{C}$, alors, pour tout $x \in [0\,;\pi]$:

$$\begin{aligned} T(\alpha f + g)(x) &= \int_0^\pi K(x,y)(\alpha f + g)(y)\,\mathrm{d}y = \int_0^\pi K(x,y)\big(\alpha f(y) + g(y)\big)\,\mathrm{d}y \\ &= \alpha\int_0^\pi K(x,y)f(y)\,\mathrm{d}y + \int_0^\pi K(x,y)g(y)\,\mathrm{d}y = \alpha T(f)(x) + T(g)(x) = \big(\alpha T(f) + T(g)\big)(x), \end{aligned}$$

et donc :

$$T(\alpha f + g) = \alpha T(f) + T(g).$$

• Soit $f \in \operatorname{Ker}(T)$. On a alors $T(f) = 0$, donc $-\pi f = \big(T(f)\big)'' = 0$, $f = 0$. Ceci montre $\operatorname{Ker}(T) = \{0\}$, et donc l'application linéaire T est injective.

• On a vu que, pour toute $f \in \mathcal{C}$, on a $T(f)(0) = 0$. Il en résulte que, par exemple, l'application constante égale à 1 n'est pas de la forme $T(f)$, et donc T n'est pas surjective.

$\boxed{\textbf{3.}}$ On a, pour toute $f \in \mathcal{C}$ et tout $x \in [0\,;\pi]$, en remarquant que K est à valeurs réelles positives ou nulles :

$$\left|T(f)(x)\right| = \left|\int_0^\pi K(x,y)f(y)\,\mathrm{d}y\right| \leqslant \int_0^\pi K(x,y)|f(y)|\,\mathrm{d}y \leqslant \Big(\int_0^\pi K(x,y)\,\mathrm{d}y\Big)||f||_\infty.$$

On calcule cette dernière intégrale :

$$\int_0^\pi K(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_0^x y(\pi-x)\,\mathrm{d}y + \int_x^\pi x(\pi-y)\,\mathrm{d}y = (\pi-x)\int_0^x y\,\mathrm{d}y + x\int_x^\pi (\pi-y)\,\mathrm{d}y$$
$$= (\pi-x)\int_0^x y\,\mathrm{d}y + x\int_0^{\pi-x} z\,\mathrm{d}z = (\pi-x)\frac{x^2}{2} + x\frac{(\pi-x)^2}{2} = \frac{\pi x(\pi-x)}{2}.$$

L'étude du trinôme obtenu montre que celui-ci est maximum lorsque $x = \dfrac{\pi}{2}$. On a donc :

$$\forall\, f \in \mathcal{C},\ \forall\, x \in [0\,;\pi],\quad \left|T(f)(x)\right| \leqslant \frac{\pi^3}{8}||f||_\infty,$$

d'où, en prenant la borne supérieure lorsque x décrit $[0\,;\pi]$:

$$\forall\, f \in \mathcal{C},\quad ||T(f)||_\infty \leqslant \frac{\pi^3}{8}||f||_\infty.$$

Ceci montre que l'application T, qui est déjà linéaire, est linéaire continue et que :

$$|||T||| \leqslant \frac{\pi^3}{8}.$$

De plus, en envisageant l'application constante égale à 1 :

$$\forall\, x \in [0\,;\pi],\quad T(1)(x) = \int_0^\pi K(x,y)\,\mathrm{d}y = \frac{\pi x(\pi-x)}{2},$$

et donc $||T(1)||_\infty = \dfrac{\pi^3}{8}$. Comme $||1||_\infty = 1$, on conclut que la borne supérieure donnant $|||T|||$ est atteinte en (au moins) la fonction constante égale à 1, et finalement :

$$\boxed{|||T||| = \frac{\pi^3}{8}}$$

$\boxed{\textbf{4.a.}}$ Soit $x \in [0\,;\pi]$. On a, en utilisant le résultat obtenu en II.4. :

$$T(f)(x) = \int_0^\pi K(x,y)f(y)\,\mathrm{d}y = \int_0^\pi \sum_{n=1}^{+\infty} 2\frac{\sin nx \sin ny}{n^2}f(y)\,\mathrm{d}y.$$

Il est clair que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'application $y \longmapsto 2\dfrac{\sin nx \sin ny}{n^2}f(y)$ est continue, et que la série d'applications $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\Big(y \longmapsto 2\frac{\sin nx \sin ny}{n^2}f(y)\Big)$ converge normalement, donc uniformément, sur $[0\,;\pi]$.

On peut donc, d'après un théorème du cours, permuter intégrale et série, d'où :

$$T(f)(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^\pi 2\frac{\sin nx \sin ny}{n^2}f(y)\,\mathrm{d}y = \sum_{n=1}^{+\infty} 2\frac{\sin nx}{n^2}\int_0^\pi f(y)\sin ny\,\mathrm{d}y$$
$$= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin nx}{n^2}\pi b_n(f^*) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\pi b_n(f^*)}{n^2}\sin nx.$$

$\boxed{\textbf{4.b.}}$ Nous allons montrer, en utilisant la convergence uniforme de la série trigonométrique obtenue ci-dessus, qu'il s'agit de la série de Fourier de g^*.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ fixé. On a :

$$b_p(g^*) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi T(f)(y)\sin py \,\mathrm{d}y = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\pi b_n(f^*)}{n^2}\sin ny \sin py\Big)\,\mathrm{d}y.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'application $y \longmapsto \dfrac{\pi b_n(f^*)}{n^2}\sin ny \sin py$ est continue sur $[0\,;\pi]$.

La série d'applications $\Big(y \longmapsto \dfrac{\pi b_n(f^*)}{n^2}\sin ny \sin py\Big)$ converge normalement, donc uniformément, sur $[0\,;\pi]$, puisque, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $y \in [0\,;\pi]$:

$$\Big|\frac{\pi b_n(f^*)}{n^2}\sin ny \sin py\Big| \leqslant \frac{\pi|b_n(f^*)|}{n^2} \leqslant \frac{2\pi||f||_\infty}{n^2}.$$

D'après un théorème du cours, on peut permuter intégrale et série, d'où :

$$b_p(g^*) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\pi b_n(f^*)}{n^2}\int_0^\pi \sin ny \sin py\,\mathrm{d}y.$$

Si $n \neq p$, alors :

$$\int_0^\pi \sin ny \sin py\,\mathrm{d}y = \int_0^\pi \frac{1}{2}\big(\cos(n-p)y - \cos(n+p)y\big)\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\Big[\frac{\sin(n-p)y}{n-p} - \frac{\sin(n+p)y}{n+p}\Big]_0^\pi = 0.$$

Et, si $n = p$:

$$\int_0^\pi \sin ny \sin py\,\mathrm{d}y = \int_0^\pi \sin^2 py\,\mathrm{d}y = \int_0^\pi \frac{1-\cos 2py}{2}\,\mathrm{d}y = \frac{\pi}{2}.$$

On déduit :

$$b_p(g^*) = \frac{2}{\pi}\frac{\pi b_p(f^*)}{p^2}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi b_p(f^*)}{p^2}.$$

On conclut :

$$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}^*, \quad b_n(g^*) = \frac{\pi b_n(f^*)}{n^2}}$$

$\boxed{\textbf{5.}}$ On applique la formule de Parseval à f^* et à g^*, qui sont 2π-périodiques et continues par morceaux :

$$\frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^\pi \big(f(t)\big)^2\,\mathrm{d}t.$$

On obtient ici :

$$\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\big(b_n(f^*)\big)^2 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \big(f(t)\big)^2\,\mathrm{d}t,$$

c'est-à-dire :

$$\boxed{\int_0^\pi \big(f(t)\big)^2\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\big(b_n(f^*)\big)^2}$$

et :

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \big(T(f)\big)^2\,\mathrm{d}t = \frac{2}{2\pi}\int_0^\pi \big(g^*(t)\big)^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\big(b_n(g^*)\big)^2 = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\pi^2\big(b_n(f^*)\big)^2}{n^4} = \frac{\pi^2}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\big(b_n(f^*)\big)^2}{n^2},$$

c'est-à-dire :

$$\boxed{\int_0^\pi \big(T(f)(t)\big)^2\,\mathrm{d}t = \frac{\pi^3}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\big(b_n(f^*)\big)^2}{n^4}}$$

$\boxed{\textbf{6.}}$ *1)* Soit $(\lambda, f) \in \mathbb{R} \times \mathcal{C}$ tel que : $T(f) = \lambda f$ et $f \neq 0$. Notons $g = T(f)$.

On a alors, d'une part : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad b_n(g^*) = \lambda b_n(f^*)$,

et d'autre part, d'après 4.b. : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad b_n(g^*) = \dfrac{\pi}{n^2} b_n(f^*)$,

d'où : $\qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left(\lambda - \dfrac{\pi}{n^2}\right) b_n(f^*) = 0.$

Si $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \lambda \neq \dfrac{\pi}{n^2}\right)$, alors $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad b_n(f^*) = 0$, puis, d'après un théorème du cours sur les séries de Fourier, $f^* = 0$, donc $f = 0$, exclu.

Il existe donc $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\lambda = \dfrac{\pi}{n_0^2}$ et il est clair que n_0 est alors unique.

On déduit : $\forall n \in \mathbb{N}^* - \{n_0\}, \quad b_n(f^*) = 0$.

D'après un théorème du cours sur les séries de Fourier, il en résulte que $f^* - b_{n_0}(f^*) s_{n_0} = 0$, où on a noté $s_{n_0} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad t \longmapsto \sin n_0 t$, et donc il existe $\beta \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall t \in [0\,;\pi], \quad f(t) = \beta \sin(n_0 t).$$

2) Réciproquement, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, en notant $\lambda = \dfrac{\pi}{n^2}$ et $f : [0\,;\pi] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad t \longmapsto \sin(nt)$, il est clair que $f \neq 0$ et $T(f) = \lambda f$.

On conclut :

$$\boxed{\mathrm{Sp}\,(f) = \left\{\frac{\pi}{n^2}\,; n \in \mathbb{N}^*\right\}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathrm{SEP}\left(f, \frac{\pi}{n^2}\right) = \mathrm{Vect}\,(t \longmapsto \sin nt)}$$

* *