Préparation à l'agrégation interne de mathématiques

Jean-Marie Monier

pour mercredi 15 juin 2011

Exercices de révision

Thème : Suites et séries de fonctions

Cours

Réviser les suites de fonctions et les séries de fonctions.

Référence : Jean-Marie Monier, Analyse MP, Cours, exercices-types, méthodes, exercices résolus, Dunod, 9 782 100 510 399, chapitre 5, pages 287-349.
Il y a trois niveaux de travail :

Niveau I : Élémentaire :

Définitions de la convergence simple et de la convergence uniforme pour une suite de fonctions, propriétés élémentaires.

Définitions de la convergence simple, de la convergence absolue, de la convergence normale, de la convergence uniforme d'une série de fonctions, propriétés élémentaires.

Niveau II : Moyen :

Propriétés relatives à : limite, continuité, intégration, dérivation. Théorème de Weierstrass.

Niveau III : Avancé :

CNS de Cauchy de convergence uniforme d'une suite de fonctions, CNS de Cauchy de convergence uniforme d'une série de fonctions, transformation d'Abel.

Exercices

Les exercices sont tirés du livre ”Méthodes et Exercices MP”.

Niveau I

1 Exemples d’étude de suites de fonctions, convergence simple, convergence uniforme

Étudier (convergence simple, convergence uniforme, convergence uniforme sur des sous-ensembles de l’ensemble de départ) les suites d’applications suivantes :

a) $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\quad x \longmapsto \dfrac{n+1}{n^2+x^2},\quad n \in \mathbb{N}^*$

b) $f_n : [0\,;1] \longrightarrow \mathbb{R},\quad x \longmapsto \dfrac{nx^2}{1+nx},\quad n \in \mathbb{N}^*$

c) $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\quad x \longmapsto \dfrac{x}{x^2+n^2},\quad n \in \mathbb{N}^*$

d) $f_n : [0\,;1] \longrightarrow \mathbb{R},\quad x \longmapsto x^n(1-x),\quad n \in \mathbb{N}^*$

e) $f_n : [0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R},\quad x \longmapsto \dfrac{nx^3}{1+n^2x},\quad n \in \mathbb{N}$

f) $f_n : [0\,;1[\longrightarrow \mathbb{R},\quad x \longmapsto \operatorname{Min}\Big(n, \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}\Big),\quad n \in \mathbb{N}$

g) $f_n : [-1\,;1] \longrightarrow \mathbb{R},\quad x \longmapsto \begin{cases} n|x|-n+1 & \text{si } |x| > 1-\dfrac{1}{n} \\ 0 & \text{si } |x| \leqslant 1-\dfrac{1}{n} \end{cases} \quad n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2$

h) $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\quad x \longmapsto \begin{cases} x^2 \sin\dfrac{1}{nx} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}^*.$

2 Convergence simple et croissance, convexité, lipschitzianité

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $(f_n : I \longrightarrow \mathbb{R})_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d’applications, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application, $k \in \mathbb{R}_+$. Montrer que si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est croissante (resp. convexe, resp. k-lipschitzienne), alors f est croissante (resp. convexe, resp. k-lipschitzienne).

3 Étudier (convergences simple, absolue, normale, uniforme) les séries d’applications $\sum\limits_n f_n$ suivantes :

a) $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\quad x \longmapsto \dfrac{\sin(nx)}{n^2+x^2},\quad n \in \mathbb{N}^*$

b) $f_n : [0\,;1] \longrightarrow \mathbb{R},\quad x \longmapsto n^2x^n(1-x)^n,\quad n \in \mathbb{N}$

c) $f_n : [0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R},\quad x \longmapsto \dfrac{nx^2}{n^3+x^2},\quad n \in \mathbb{N}^*$

d) $f_n : [0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R},\quad x \longmapsto \dfrac{x}{n}\,\mathrm{e}^{-n^2x^2},\quad n \in \mathbb{N}^*$

e) $f_n : [0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R},\quad x \longmapsto \dfrac{n+x}{x^2+n^3},\quad n \in \mathbb{N}^*$

f) $f_n : [0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R},\quad x \longmapsto \dfrac{(-1)^n}{x^2+n^2},\quad n \in \mathbb{N}^*$

g) $f_n : [0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R},\quad x \longmapsto \dfrac{(-1)^n}{x^2+n},\quad n \in \mathbb{N}^*.$

4 Exemple de convergence uniforme et composition

Soient X un ensemble non vide, $(f_n : X \longrightarrow \mathbb{R}_+)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications, $f : X \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une application. On suppose : $f_n \xrightarrow[n\infty]{C.U.} f$. Montrer : $\ln(1+f_n) \xrightarrow[n\infty]{C.U.} \ln(1+f)$.

5 Exemples de recherche de limites d'intégrales

Déterminer les limites suivantes, lorsque l'entier n tend vers l'infini :

a) $\displaystyle\lim_{n\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{x}{n}}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ *b)* $\displaystyle\lim_{n\infty} \int_1^{+\infty} \frac{n}{nx^2+\mathrm{e}^{x}}\,\mathrm{d}x$ *c)* $\displaystyle\lim_{n\infty} \int_0^{+\infty} \frac{x^n}{x^{2n}+x^n+1}\,\mathrm{d}x.$

6 Exemple d'utilisation du théorème de convergence dominée

Soit $f : [0\,;1] \longrightarrow \mathbb{C}$ continue par morceaux. Montrer :

$$\int_0^1 f(x)\Big(1-\frac{x}{n}\Big)^n\,\mathrm{d}x \underset{n\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 f(x)\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x.$$

Niveau II

1 Limites d'intégrales issues de la fonction Γ d'Euler

Étudier la convergence simple et la convergence uniforme des deux suites d'applications définies, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0\,;+\infty[$, par :

$$f_n(x) = \frac{1}{n!}\int_0^x t^n\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t, \qquad g_n(x) = \frac{1}{n!}\int_x^{+\infty} t^n\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

2 Exemple de recherche d'un équivalent d'une intégrale

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux, bornée sur $\mathbb{R}$, continue en 0, telle que $f(0) \neq 0$.

Trouver un équivalent simple de $I_n = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{e}^{-n^2x^2}\,\mathrm{d}x$ lorsque l'entier n tend vers l'infini.

3 Étude de la somme d'une série de fonctions, classe C^2

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $f_n : [0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R},\quad x \longmapsto \dfrac{\ln(n+x)}{n^2}.$

a) Étudier la convergence simple de la série d'applications $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n$.

On note S la somme.

b) Montrer que S est de classe C^2 sur $[0\,;+\infty[$ et exprimer, pour tout $x \in [0\,;+\infty[$, $S'(x)$ et $S''(x)$ sous forme de sommes de séries.

c) En déduire que S est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$ et que S est convexe sur $[0\,;+\infty[$.

4 Fonction ζ de Riemann

On note, sous réserve d'existence, pour $x \in \mathbb{R}$: $\zeta(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.

a) Montrer : $\text{Déf}\,(\zeta) =]1\,;+\infty[$.

b) Établir que ζ est de classe C^∞ sur $]1\,;+\infty[$ et exprimer, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $x \in]1\,;+\infty[$, $\zeta^{(k)}(x)$ sous forme de somme d'une série.

c) Étudier les variations et la convexité de ζ.

d) Montrer : $\quad \forall\, x \in]1\,;+\infty[, \quad \dfrac{1}{x-1} \leqslant \zeta(x) \leqslant 1 + \dfrac{1}{x-1}$,

et en déduire : $\zeta(x) \underset{x \longrightarrow 1^+}{\sim} \dfrac{1}{x-1}$, puis : $\zeta(x) \underset{x \longrightarrow 1^+}{\longrightarrow} +\infty$.

e) Montrer : $\zeta(x) \underset{x \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} 1$, et $\zeta(x) - 1 \underset{x \longrightarrow +\infty}{\sim} \dfrac{1}{2^x}$.

f) Dresser le tableau de variations de ζ et tracer la courbe représentative de ζ.

5 Étude de la somme d'une série d'applications, continuité

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\quad f_n :]0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \dfrac{(-1)^n}{n^x}$.

a) Étudier les convergences simple, absolue, normale, normale sur certaines parties, uniforme, uniforme sur certaines parties, de la série d'applications $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} f_n$.

On note : $\quad T :]0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}$.

b) Montrer que T est continue sur $]0\,;+\infty[$.

c) Exprimer, pour tout $x \in]0\,;+\infty[$, $T(x)$ à l'aide de $\zeta(x)$, où ζ est la fonction de Riemann.

6 Calcul d'une intégrale par utilisation d'une série

Existence et calcul de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{\operatorname{sh} x}\,\mathrm{d}x$. On admettra : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

7 Exemples d'étude de convergence pour une série d'applications

Étudier (convergences simple, absolue, normale, uniforme) les séries d'applications $\displaystyle\sum_n f_n$ suivantes :

a) $f_n :]0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \dfrac{x^a}{(n+x)^b}, \quad (a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ fixé, $\quad n \in \mathbb{N}^*$

b) $f_n : [0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \dfrac{x\,\mathrm{e}^{-nx}}{\ln n}, \quad n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2$

c) $f_n : [0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \dfrac{(-1)^n x}{x^2+n}, \quad n \in \mathbb{N}^*$

d) $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \operatorname{Arctan}(x+n) - \operatorname{Arctan} n, \quad n \in \mathbb{N}$

e) $f_n : [0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \dfrac{nx}{1+n^3x^2}, \quad n \in \mathbb{N}$.

8 Étude de la somme d'une série d'applications, intégrabilité

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\quad f_n :]0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \dfrac{1}{x^2(n^4+x^2)}$.

a) Montrer que la série d'applications $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $]0\,;+\infty[$, et converge normalement sur $[a\,;+\infty[$, pour tout $a \in]0\,;+\infty[$ fixé.

b) Établir que S est continue sur $]0\,;+\infty[$.

c) Est-ce que S est intégrable sur $]0\,;1]$? sur $[1\,;+\infty[$?

* *