Préparation à l'agrégation interne de Mathématiques 2010-2011

Jean-Marie Monier

Corrigé de l'épreuve d'entraînement du samedi 18 décembre 2010

Partie I

1.a. D'après le cours, puisque f est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension 2 et que f admet deux valeurs propres distinctes, f est diagonalisable.

1.b. Puisque f est diagonalisable , il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \mathrm{diag}\,(\lambda_1, \lambda_2)$.

Soit $h \in \mathcal{L}(E)$. Notons $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(h) = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$. On a :

$$h \in \mathcal{R}(f) \iff h^2 = f \iff \big(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(h)\big)^2 = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$$

$$\iff \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

$$\iff x^2 + yz = \lambda_1, \quad y(x+t) = 0, \quad z(x+t) = 0, \quad t^2 + yz = \lambda_2.$$

Dans ce système, si $x + t = 0$, alors $x^2 = t^2$, puis $\lambda_1 = \lambda_2$, exclu. Donc :

$$h \in \mathcal{R}(f) \iff \Big(y = z = 0, \quad x^2 = \lambda_1, \quad t^2 = \lambda_2\Big).$$

Les matrices dans $\mathcal{B}$ des éléments de $\mathcal{R}(f)$ sont donc les matrices diagonales $\mathrm{diag}\,(x, t)$, où $(x, t) \in \mathbb{C}^2,\ x^2 = \lambda_1,\ t^2 = \lambda_2$. Il est clair que $\mathcal{R}(f)$ est fini et que :

$$\mathrm{Card}\,\big(\mathcal{R}(f)\big) = \begin{cases} 4 & \text{si} \quad \lambda_1 \neq 0 \quad \text{et} \quad \lambda_2 \neq 0 \\ 2 & \text{si} \quad \lambda_1 = 0 \quad \text{ou} \quad \lambda_2 = 0. \end{cases}$$

Exemples :

• Si $\lambda_1 = 4$ et $\lambda_2 = 9$, alors $\mathcal{R}(f)$ est l'ensemble des quatre endomorphismes de E ayant pour matrices dans $\mathcal{B}$ les quatre matrices diagonales suivantes :

$$\mathrm{diag}\,(2, 3), \quad \mathrm{diag}\,(2, -3), \quad \mathrm{diag}\,(-2, 3), \quad \mathrm{diag}\,(-2, -3).$$

• Si $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = 1$, alors $\mathcal{R}(f)$ est l'ensemble des deux endomorphismes de E ayant pour matrices dans $\mathcal{B}$ les deux matrices diagonales suivantes :

$$\mathrm{diag}\,(0, 1), \quad \mathrm{diag}\,(0, -1).$$

2.a. D'après le cours, tout endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $\geqslant 1$ est trigonalisable, donc f est trigonalisable.

Puisque f est trigonalisable, il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ c & \lambda_1 \end{pmatrix}$, où $c \in \mathbb{C}$.

2.b.i. On suppose ici $\lambda_1 \neq 0$ et $c \neq 0$.

Soit $h \in \mathcal{L}(E)$. Notons $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(h) = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$. On a :

$$h \in \mathcal{R}(f) \iff h^2 = f \iff \big(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(h)\big)^2 = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$$
$$\iff \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ c & \lambda_1 \end{pmatrix}$$
$$\iff x^2 + yz = \lambda_1, \quad y(x+t) = 0, \quad z(x+t) = c, \quad t^2 + yz = \lambda_1.$$

Comme $c \neq 0$, on a nécessairement dans ce système $x + t \neq 0$, puis $y = 0$, donc :

$$h \in \mathcal{R}(f) \iff \big(x^2 = \lambda_1, \quad y = 0, \quad z(x+t) = c, \quad t^2 = \lambda_1\big).$$

Notons μ_1 une racine carrée de λ_1 dans $\mathbb{C}$ (d'après le cours, il en existe au moins une, et même il en existe exactement deux).

Si $h \in \mathcal{R}(f)$, alors $x^2 = \lambda_1 = t^2$, donc $(x-t)(x+t) = 0$, puis, comme $z(x+t) = c \neq 0$, on a $x + t \neq 0$, donc $x - t = 0$, $x = t$. Ainsi :

$$h \in \mathcal{R}(f) \iff \Big(\big(x = \mu_1, \quad y = 0, \quad t = \mu_1, \quad z = \frac{c}{2\mu_1}\big) \quad \text{ou} \quad \big(x = -\mu_1, \quad y = 0, \quad t = -\mu_1, \quad z = -\frac{c}{2\mu_1}\big)\Big).$$

Les matrices dans $\mathcal{B}$ des éléments de $\mathcal{R}(f)$ sont donc les deux matrices

$$\begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ \dfrac{c}{2\mu_1} & \mu_1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} -\mu_1 & 0 \\ -\dfrac{c}{2\mu_1} & -\mu_1 \end{pmatrix}.$$

Il est clair alors que $\mathcal{R}(f)$ est fini non vide et de cardinal 2.

2.b.ii. On suppose ici $c = 0$.

Il existe $\mu_1 \in \mathbb{C}$ tel que $\mu_1^2 = \lambda_1$. L'endomorphisme h de E dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est $\mathrm{diag}\,(\mu_1, \mu_1)$ vérifie $h^2 = f$, donc $h \in \mathcal{R}(f)$, d'où $\mathcal{R}(f) \neq \varnothing$.

2.b.iii. On suppose ici $\lambda_1 = 0$ et $c \neq 0$.

Soit $h \in \mathcal{L}(E)$. Notons $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(h) = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$. On a :

$$h \in \mathcal{R}(f) \iff h^2 = f \iff \big(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(h)\big)^2 = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$$
$$\iff \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}$$
$$\iff x^2 + yz = 0, \quad y(x+t) = 0, \quad z(x+t) = c, \quad t^2 + yz = 0.$$

On déduit successivement de ce système : $z(x+t) \neq 0$, $x + t \neq 0$, $y = 0$, $x^2 = 0$ et $t^2 = 0$, $x = t = 0$, $x + t = 0$, contradiction.

On conclut : $\mathcal{R}(f) = \varnothing$.

3.a. D'après les questions précédentes, le seul cas où $\mathcal{R}(f)$ est vide est celui où f admet 0 pour valeur propre double et où $f \neq 0$.

• Si f admet 0 pour valeur propre double et $f \neq 0$, alors il existe une base $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de f est de la forme $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}$, $c \in \mathbb{C}^*$, d'où, par produit matriciel : $f^2 = 0$.

• Réciproquement, supposons $f^2 = 0$ et $f \neq 0$.

Le polynôme X^2 est annulateur de f, donc , d'après le cours, les valeurs propres de f sont parmi les zéros de X^2, d'où $\mathrm{Sp}\,(f) \subset \{0\}$.

D'autre part, comme E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $\geqslant 1$, d'après le cours, f est trigonalisable. Il existe donc une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}$, où $c \in \mathbb{C}^*$. D'après 2.b.iii., on a alors $\mathcal{R}(f) = \varnothing$.

On obtient :

$$\mathcal{R}(f) = \varnothing \iff \big(f^2 = 0 \ \text{ et } \ f \neq 0\big),$$

et on conclut :

$$\boxed{\mathcal{V}(E) = \big\{f \in \mathcal{L}(E), \quad f^2 = 0 \ \text{ et } \ f \neq 0\big\}}$$

3.b. • L'espace vectoriel E admet au moins une base $\mathcal{B}$.

Considérons, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, l'endomorphisme f_p de E tel que $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(f_p) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1/p \end{pmatrix}$.

Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, puisque f_p admet deux valeurs propres distinctes (qui sont 0 et $1/p$), d'après 1., on a : $f_p \in \mathcal{U}(E)$.
D'autre part :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1/p \end{pmatrix} \underset{p\infty}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

donc la suite $(f_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ converge dans $\mathcal{L}(E)$ vers l'élément f dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

D'après 2.b.iii., on a : $f \in \mathcal{V}(E)$, c'est-à-dire : $f \notin \mathcal{U}(E)$.
Ainsi, il existe une suite d'éléments de $\mathcal{U}(E)$ convergeant dans $\mathcal{L}(E)$ vers un élément qui n'est pas dans $\mathcal{U}(E)$, donc $\mathcal{U}(E)$ n'est pas fermé, et, en passant aux complémentaires, on conclut :

$$\boxed{\mathcal{V}(E) \text{ n'est pas ouvert dans } \mathcal{L}(E)}$$

• Considérons, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, l'endomorphisme g_p de E tel que $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(g_p) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1/p & 0 \end{pmatrix}$.

D'après 2.b.iii., on a, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$: $g_p \in \mathcal{V}(E)$.
D'autre part :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1/p & 0 \end{pmatrix} \underset{p\infty}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

donc la suite $(g_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0 dans $\mathcal{L}(E)$.
Enfin, d'après 2.b.ii., $0 \in \mathcal{U}(E)$.
Ainsi, il existe une suite d'éléments de $\mathcal{V}(E)$ convergeant dans $\mathcal{L}(E)$ vers un éléments qui n'est pas dans $\mathcal{V}(E)$, et on conclut :

$$\boxed{\mathcal{V}(E) \text{ n'est pas fermé dans } \mathcal{L}(E)}$$

4. • Soit $h \in \mathcal{R}(0)$.

On a alors $h^2 = 0$, donc, comme plus haut, $\operatorname{Sp}(h) = \{0\}$ et il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(h) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}$, notée H, où $c \in \mathbb{C}$. On a alors $\operatorname{tr}(h) = \operatorname{tr}(H) = 0$ et $\det(h) = \det(H) = 0$.

• Réciproquement, soit $h \in \mathcal{L}(E)$ tel que : $\operatorname{tr}(h) = 0$ et $\det(h) = 0$.
Il est immédiat, par calcul élémentaire ou par application du théorème de Cayley-Hamilton, que, pour toute matrice $H \in \mathbf{M}_2(\mathbb{C})$:

$$H^2 - \operatorname{tr}(H)H + \det(H)\,\mathrm{I}_2 = 0,$$

d'où, en passant aux endomorphismes :

$$h^2 - \operatorname{tr}(h)h + \det(h)e = 0,$$

puis ici $h^2 = 0$, donc $h \in \mathcal{R}(0)$.

On conclut :

$$\boxed{\mathcal{R}(0) = \big\{h \in \mathcal{L}(E)\,;\, \operatorname{tr}(h) = 0 \ \text{ et } \ \det(h) = 0\big\}}$$

Partie II

1. D'après le cours, puisque E est un espace vectoriel de dimension finie égale à n et que $f \in \mathcal{L}(E)$ admet n valeurs propres deux à deux distinctes, f est diagonalisable.
Il existe donc une base $\mathcal{B}$ de E telle que : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \mathrm{diag}\,(\lambda_1, ..., \lambda_n)$.

2. On a, pour tout $h \in \mathcal{R}(f)$:

$$h \circ f = h \circ h^2 = h^3 = h^2 \circ h = f \circ h.$$

3. Soit $h \in \mathcal{L}(E)$. Notons $(h_{ij})_{ij} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(h)$. On a :

$$h \in \mathcal{R}(f) \implies h \circ f = f \circ h \iff H\,\mathrm{diag}\,(\lambda_1, ..., \lambda_n) = \mathrm{diag}\,(\lambda_1, ..., \lambda_n) H$$

$$\iff \forall\,(i,k) \in \{1, ..., n\}^2, \quad \sum_{j=1}^{n} h_{ik}\delta_{kj}\lambda_j = \sum_{j=1}^{n} \delta_{ij}\lambda_i h_{jk}$$

$$\iff \forall\,(i,k) \in \{1, ..., n\}^2, \quad h_{ik}\lambda_k = \lambda_i h_{ik}$$

$$\iff \forall\,(i,k) \in \{1, ..., n\}^2, \quad (\underbrace{\lambda_i - \lambda_k}_{\neq 0})h_{ik} = 0$$

$$\iff \forall\,(i,k) \in \{1, ..., n\}^2, \quad \big(i \neq k \implies h_{ik} = 0\big),$$

donc H est diagonale.

4. D'après 3. et un calcul immédiat sur des matrices diagonales, on conclut : les matrices dans $\mathcal{B}$ des éléments de $\mathcal{R}(f)$ sont les matrices diagonales $\mathrm{diag}\,(\mu_1, ..., \mu_n)$, où $(\mu_1, ..., \mu_n) \in \mathbb{C}^n$ est tel que, pour tout $i \in \{1, ..., n\}$, $\mu_i^2 = \lambda_i$.

5. • Pour chaque $i \in \{1, ..., n\}$, l'équation $\mu_i^2 = \lambda_i$, d'inconnue $\mu_i \in \mathbb{C}$, admet exactement une solution si $\lambda_i = 0$, deux solutions si $\lambda_i \neq 0$.

• Il en résulte que $\mathcal{R}(f)$ est fini non vide et, puisque $\lambda_1, ..., \lambda_n$ sont deux à deux distincts, seul au plus l'un des λ_i est nul, donc :

$$\mathrm{Card}\,\big(\mathcal{R}(f)\big) = \begin{cases} 2^n & \text{si} \quad \forall\, i \in \{1, ..., n\}, \quad \lambda_i \neq 0 \\ 2^{n-1} & \text{si} \quad \exists\, i \in \{1, ..., n\}, \quad \lambda_i = 0. \end{cases}$$

• Comme 5 n'est pas de la forme 2^k pour $k \in \mathbb{N}^*$, il est clair qu'il n'existe pas n, E, f tels que $\mathrm{Card}\,\big(\mathcal{R}(f)\big) = 5$.

6. Soit $h \in \mathcal{R}(f)$.
D'après 5., il existe $(\mu_1, ..., \mu_n) \in \mathbb{C}^n$ tel que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(h) = \mathrm{diag}\,(\mu_1, ..., \mu_n)$.
Puisque $\lambda_1, ..., \lambda_n$ sont deux à deux distincts, d'après le cours sur l'interpolation de Lagrange, il existe $P \in \mathbb{C}_{n-1}[\mathrm{X}]$ tel que :

$$\forall\, i \in \{1, ..., n\}, \quad \mu_i = P(\lambda_i).$$

On a alors :

$$\mathrm{diag}\,(\mu_1, ..., \mu_n) = \mathrm{diag}\,\big(P(\lambda_1), ..., P(\lambda_n)\big) = P\big(\mathrm{diag}\,(\lambda_1, ..., \lambda_n)\big),$$

donc, en passant aux endomorphismes : $h = P(f)$.

7. Soient $h, h' \in \mathcal{R}(f)$.
Première méthode :
D'après 3., les matrices de h et h' dans $\mathcal{B}$ sont diagonales, donc commutent entre elles, donc h et h' commutent.

Deuxième méthode :
D'après 6., il existe $P, Q \in \mathbb{C}_{n-1}[\mathrm{X}]$ tels que $h = P(f)$ et $h' = Q(f)$, d'où :

$$h \circ h' = P(f) \circ Q(f) = (PQ)(f) = (QP)(f) = Q(f) \circ P(f) = h' \circ h.$$

Partie III

1. Soit $h \in \mathcal{R}(f)$.

On a : $\quad h^{2\nu} = (h^2)^\nu = f^\nu = 0, \quad$ donc h est nilpotent.

Le polynôme $\mathrm{X}^{2\nu}$ est annulateur de h, donc, d'après le cours : $\mathrm{Sp}\,(h) \subset \{0\}$.

D'autre part, puisque E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $\geqslant 1$, d'après le cours, h est trigonalisable. Il existe donc une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(h)$ soit une matrice triangulaire à termes diagonaux tous nuls. Le polynôme caractéristique χ_h de h est donc $\chi_h = (-1)^n \mathrm{X}^n$. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, on a $\chi_h(h) = 0$, donc $(-1)^n h^n = 0$, d'où : $h^n = 0$.

2. Supposons $\mathcal{R}(f) \neq \varnothing$, c'est-à-dire qu'il existe $h \in \mathcal{L}(E)$ tel que $h \in \mathcal{R}(f)$.

D'après 1., on a alors $h^n = 0$. Notons $p = \mathrm{E}\Big(\dfrac{n+1}{2}\Big)$. Distinguons deux cas selon la parité de n.

• Cas n pair :

On a alors $n = 2p$ où p a été défini ci-dessus. Et : $\ f^p = (h^2)^p = h^{2p} = h^n = 0$.

D'autre part, comme $f^{\nu-1} \neq 0$, il est clair que : $\ \forall\, q \in \{0, ..., \nu - 1\}, \quad f^q \neq 0$.

D'où nécessairement : $p \geqslant \nu$.

• Cas n impair :

On a alors $n = 2p - 1$, où p a été défini, plus haut. Et : $\ f^p = (h^2)^p = h^{2p} = h^{n+1} = h^n \circ h = 0$.

D'où nécessairement : $p \geqslant \nu$.

On conclut :

$$\mathcal{R}(f) \neq \varnothing \implies \nu \leqslant \mathrm{E}\Big(\frac{n+1}{2}\Big)$$

3. • On a, par produit matriciel : $A^2 = B \neq 0$, $\ A^3 = 0$ donc f est nilpotent et son indice ν est égal à 3.

Avec les notations de 2., on a $\ p = \mathrm{E}\Big(\dfrac{n+1}{2}\Big) = 2$, donc $\nu > p$. D'après 2., on conclut : $\mathcal{R}(f) = \varnothing$.

• Puisque $B = A^2$, on a $g = f^2$, donc $f \in \mathcal{R}(g)$ et on conclut : $\mathcal{R}(g) \neq \varnothing$.

4. Il est clair que E est bien un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie égale à n et que $f \in \mathcal{L}(E)$.

Comme : $\ \forall\, P \in E, \quad P^{(n)} = 0, \quad$ on a : $\ \forall\, P \in E, \quad f^n(P) = 0$, donc $f^n = 0$, f est nilpotent.

De plus : $f^{n-1}(\mathrm{X}^{n-1}) = (n-1)! \neq 0$, donc $f^{n-1} \neq 0$.

Ainsi, f est nilpotent d'indice $\nu = n$.

Si $\ n \leqslant \mathrm{E}\Big(\dfrac{n+1}{2}\Big)$, alors $\ n \leqslant \dfrac{n+1}{2}$, $\ n \leqslant 1$ exclu.

On a donc $\ \nu = n > \mathrm{E}\Big(\dfrac{n+1}{2}\Big)$. D'après 2., par contraposition, on conclut : $\mathcal{R}(f) = \varnothing$.

Partie IV

A.1. D'après le cours, l'application $\ x \longmapsto \sqrt{1+x}\ $ admet un développement limité en 0 à tout ordre, en particulier à l'ordre n, donc, avec une notation en grand O, il existe $(a_0, ..., a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ unique tel que, au voisinage de 0 :

$$\sqrt{1+x} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k + \underset{x \longrightarrow 0}{O}(x^n).$$

A.2. On a, d'après 1. :

$$\sqrt{1+x} = P_n(x) + \underset{x \longrightarrow 0}{O}(x^n),$$

d'où, en élevant au carré :

$$1+x=\big(P_n(x)\big)^2+\underset{x\longrightarrow 0}{O}(x^n),$$

puis :

$$\big(P_n(x)\big)^2-1-x=\underset{x\longrightarrow 0}{O}(x^n).$$

A.3. Par division euclidienne de $P_n^2-1-\mathrm{X}$ par X^n dans $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$, il existe $Q,R\in\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ tels que :

$$P_n^2-1-\mathrm{X}=\mathrm{X}^nQ+R \quad \text{et} \quad \deg(R)<n.$$

On a alors, au voisinage de 0 :

$$R(x)=\big[\big(P_n(x)\big)^2-1-x\big]-x^nQ(x)=O(x^n)+O(x^n)=O(x^n).$$

Notons $R=\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k\mathrm{X}^k$,

Si $(\alpha_0,\dots,\alpha_{n-1})\neq(0,\dots,0)$, en notant i le plus petit indice tel que $\alpha_i\neq 0$, on a $R(x)\underset{x\longrightarrow 0}{\sim}\alpha_i x^i$, contradiction avec $R=O(x^n)$.

On a donc $R=0$ et on conclut :

$$\boxed{\mathrm{X}^n \text{ divise } P_n^2-1-\mathrm{X} \text{ dans } \mathbb{R}[\mathrm{X}]}$$

A.4. D'après 3., il existe $Q\in\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ tel que $P_n^2-1-\mathrm{X}=\mathrm{X}^nQ$. D'où, en passant aux polynômes d'endomorphismes :

$$\big(P_n(g)\big)^2-e-g=g^nQ(g).$$

Comme g est nilpotent, d'après III 1., on a $g^n=0$, d'où :

$$f=e+g=\big(P_n(g)\big)^2.$$

En notant $h=P_n(g)\in\mathcal{L}(E)$, on a donc $h^2=f$, c'est-à-dire $h\in\mathcal{R}(f)$, et on conclut : $\mathcal{R}(f)\neq\varnothing$.

B. On a :

$$f=\alpha e+g=\alpha\Big(e+\frac{1}{\alpha}g\Big).$$

D'après le cours, il existe $\beta\in\mathbb{C}^*$ tel que $\beta^2=\alpha$.

D'autre part, en notant $g_1=\dfrac{1}{\alpha}g$, comme g est nilpotent, g_1 est nilpotent. D'après A.4., il existe $h_1\in\mathcal{L}(E)$ tel que $h_1^2=e+g_1$. En notant $h=\beta h_1\in\mathcal{L}(E)$, on a : $h^2=\beta^2h_1^2=\alpha(e+g_1)=\alpha e+g=f$, donc : $h\in\mathcal{R}(f)$.

On conclut : $\mathcal{R}(f)\neq\varnothing$.

Partie V

1. Soit $f\in\mathcal{L}(E)$.

Nous allons montrer que $\mathcal{R}(f)$ est fermé en utilisant la caractérisation séquentielle des fermés.

Soit $(h_p)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite dans $\mathcal{R}(f)$, convergeant vers un élément h de $\mathcal{L}(E)$.

On a : $\forall p\in\mathbb{N}^*,\ h_p^2=f$, d'où, en passant à la limite et par continuité de la composition dans $\mathcal{L}(E)$: $h^2=f$, donc : $h\in\mathcal{R}(f)$.

On conclut :

$$\boxed{\text{Pour tout } f\in\mathcal{L}(E),\ \mathcal{R}(f) \text{ est fermé dans } \mathcal{L}(E)}$$

2. Soit $f \in \mathcal{U}(E)$. Par définition, on a alors $\mathcal{R}(f) \neq \varnothing$, donc il existe $h \in \mathcal{R}(f)$, c'est-à-dire tel que $h^2 = f$.
Considérons, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$: $h_p = h + \dfrac{1}{p}e$, de sorte que : $h_p \underset{p\infty}{\longrightarrow} h$.
Montrons que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ sauf au plus une valeur de p, on a : $h_p \notin \mathcal{R}(f)$.
En effet, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$:

$$h_p \in \mathcal{R}(f) \iff h_p^2 = f \iff h^2 + \frac{2}{p}h + \frac{1}{p^2}e = f \iff \frac{2}{p}h + \frac{1}{p^2}e = 0 \iff h = -\frac{1}{2p}e.$$

S'il existe $p_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $h = -\dfrac{1}{2p_0}e$, alors p_0 est unique et : $\forall\, p \neq p_0,\quad h \neq -\dfrac{1}{2p}e$.
Ceci montre que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ sauf au plus une valeur p_0 de de p, on a : $h^p \notin \mathcal{R}(f)$.
Ainsi, la suite $(h_p)_{p>p_0}$ est à termes dans le complémentaire de $\mathcal{R}(f)$ dans $\mathcal{L}(E)$ et converge vers h.
Ceci montre que le complémentaire de $\mathcal{R}(f)$ dans $\mathcal{L}(E)$ n'est pas fermé, et on conclut :

$$\boxed{\mathcal{R}(f) \text{ n'est pas ouvert dans } \mathcal{L}(E)}$$

3. Prenons $n = 2, f = 0$. L'espace vectoriel E admet au moins une base $\mathcal{B}$.
Considérons, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, l'élément f_p de $\mathcal{L}(E)$ défini par : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f_p) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ p & 0 \end{pmatrix}$.
On a, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ p & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, donc $f_p^2 = 0$, donc $f_p \in \mathcal{R}(0)$.
De plus : $\forall\, p \in \mathbb{N}^*,\quad ||f_p||_\infty = p,$ donc $(f_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas bornée.
Ceci fournit un exemple de n, E, f tel que $\mathcal{R}(f)$ ne soit pas borné.

Partie VI

1.a. Soient $f \in \mathcal{L}(E),\ \varepsilon > 0$ fixés.
Puisque E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $\geqslant 1$, d'après le cours, f est trigonalisable.
Il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (*) & & \lambda_n \end{pmatrix}$, où $(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$.
Considérons, pour tout $(p_1, ..., p_n) \in (\mathbb{N}^*)^n$, l'élément g de $\mathcal{L}(E)$ défini par :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) + \mathrm{diag}\left(\frac{\varepsilon}{p_1}, ..., \frac{\varepsilon}{p_n}\right) = \begin{pmatrix} \lambda_1 + \dfrac{\varepsilon}{p_1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (*) & & \lambda_n + \dfrac{\varepsilon}{p_n} \end{pmatrix}.$$

On a :

$$||g - f||_\infty = \left|\left|\mathrm{diag}\left(\frac{\varepsilon}{p_1}, ..., \frac{\varepsilon}{p_n}\right)\right|\right|_\infty = \underset{1\leqslant k\leqslant n}{\mathrm{Max}}\, \frac{\varepsilon}{p_k} \leqslant \varepsilon.$$

Il est clair que, de proche en proche, on peut choisir $p_1, ..., p_n$ de façon que $\lambda_1 + \dfrac{\varepsilon}{p_1}, ..., \lambda_n + \dfrac{\varepsilon}{p_n}$ soient deux à deux distincts.
Alors, g admet n valeurs propres deux à deux distinctes (ses termes diagonaux, puisqu'il s'agit d'une matrice triangulaire), donc $g \in \mathcal{D}(E)$.
On a prouvé :

$$\forall\, f \in \mathcal{L}(E),\ \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, g \in \mathcal{D}(E),\quad ||g - f||_\infty \leqslant \varepsilon.$$

On conclut :

$$\boxed{\mathcal{D}(E) \text{ est dense dans } \mathcal{L}(E)}$$

1.b. D'après II 5. : $\mathcal{D}(E) \subset \mathcal{U}(E)$.

Remarque : L'autre inclusion est fausse, car $0 \in \mathcal{U}(E)$ et $0 \notin \mathcal{D}(E)$.

2.a. Puisque $\mathcal{D}(E) \subset \mathcal{U}(E) \subset \mathcal{L}(E)$ et que $\mathcal{D}(E)$ est dense dans $\mathcal{L}(E)$, d'après le cours, on conclut :

$$\boxed{\mathcal{U}(E) \text{ est dense dans } \mathcal{L}(E)}$$

2.b. Soit $f \in \mathcal{V}(E)$, $(f_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ une suite dans $\mathcal{U}(E)$ telle que $f_p \underset{p\infty}{\longrightarrow} f$, $(h_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ une suite dans $\mathcal{L}(E)$ telle que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $h_p^2 = f_p$.

Pour montrer que $(h_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas bornée, raisonnons par l'absurde.

Supposons $(h_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ bornée. Comme $\mathcal{L}(E)$ est de dimension finie, d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe une extractrice σ et il existe $h \in \mathcal{L}(E)$ tels que : $h_{\sigma(p)} \underset{p\infty}{\longrightarrow} h$.

D'une part, par continuité des opérations dans $\mathcal{L}(E)$: $h^2_{\sigma(p)} \underset{p\infty}{\longrightarrow} h^2$.

D'autre part, par suite extraite : $h^2_{\sigma(p)} = f_{\sigma(p)} \underset{p\infty}{\longrightarrow} f$.

D'où $h^2 = f$, $f \in \mathcal{U}(E)$, contradiction.

On conclut : $(h_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas bornée.

3. • Nous allons montrer que $\mathcal{U}(E)$ n'est pas fermé dans $\mathcal{L}(E)$, en raisonnant par l'absurde.

Supposons $\mathcal{U}(E)$ fermé dans $\mathcal{L}(E)$. Comme $\mathcal{U}(E)$ est dense dans $\mathcal{L}(E)$, on a alors : $\mathcal{U}(E) = \overline{\mathcal{U}(E)} = \mathcal{L}(E)$.

Considérons l'élément f de $\mathcal{L}(E)$ dont la matrice dans une base fixée $\mathcal{B}$ de E a ses termes tous nuls sauf ceux situés sur la petite diagonale parallèle à la diagonale principale qui sont eux égaux à 1.

On a $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$, donc, d'après III 2. : $n \leqslant \mathrm{E}\left(\dfrac{n+1}{2}\right) \leqslant \dfrac{n+1}{2}$, d'où $2n \leqslant n+1$, $n \leqslant 1$, contradiction.

On conclut :

$$\boxed{\mathcal{U}(E) \text{ n'est pas fermé dans } \mathcal{L}(E)}$$

• De même qu'en I 3. b., considérons , pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, l'élément f_p de $\mathcal{L}(E)$ défini par $f_p = \dfrac{1}{p} f$, où f est défini ci-dessus.

On a alors , pour la même raison que ci-dessus : $\forall\, p \in \mathbb{N}^*, \quad f_p \in \mathcal{V}(E)$.

D'autre part : $f_p \underset{p\infty}{\longrightarrow} 0$ et $0 \notin \mathcal{V}(E)$.

Ceci montre que $\mathcal{V}(E)$ n'est pas fermé dans $\mathcal{L}(E)$ et on conclut :

$$\boxed{\mathcal{U}(E) \text{ n'est pas ouvert dans } \mathcal{L}(E)}$$

4.a. Soient $\alpha \in \mathbb{C}$, $f \in \mathcal{U}(E)$. Il existe $h \in \mathcal{R}(f)$, c'est-à-dire tel que $h^2 = f$. Il existe $\beta \in \mathbb{C}$ tel que $\beta^2 = \alpha$.

On a alors : $(\beta h)^2 = \beta^2 h^2 = \alpha f$, donc $\mathcal{R}(\alpha f) \neq \varnothing$, c'est-à-dire : $\alpha f \in \mathcal{U}(E)$.

On conclut :

$$\boxed{\forall\, \alpha \in \mathbb{C},\ \forall\, f \in \mathcal{U}(E), \quad \alpha f \in \mathcal{U}(E)}$$

4.b. Nous allons donner un contrexemple pour $n = 2$, et un contrexemple pour n quelconque s'obtiendra alors en complétant les matrice considérées par des termes tous nuls.

D'après I 3.a., il suffit de trouver trois matrices carrées d'ordre 2 telles que :

$$A^2 \neq 0, \quad B^2 \neq 0, \quad (A+B)^2 = 0 \quad \text{et} \quad A+B \neq 0.$$

On peut prendre : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.
Dans cet exemple, on a :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \neq 0, \quad B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \neq 0, \quad A+B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \neq 0, \quad (A+B)^2 = 0.$$

On conclut que l'on n'a pas : $\forall f, g \in \mathcal{U}(E), \quad f+g \in \mathcal{U}(E)$.

4.c. Nous allons donner un contrexemple pour $n = 2$, et un contrexemple pour n quelconque s'obtiendra alors en complétant les matrice considérées par des termes tous nuls.
D'après I 3.a., il suffit de trouver trois matrices carrées d'ordre 2 telles que :

$$A^2 \neq 0, \quad B^2 \neq 0, \quad AB \neq BA.$$

On peut prendre : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Dans cet exemple, on a :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \neq 0, \quad B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq 0, \quad AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \neq AB.$$

On conclut que l'on n'a pas : $\forall f, g \in \mathcal{U}(E), \quad f \circ g = g \circ f$.

4.d. Nous allons donner un contrexemple pour $n = 2$, et un contrexemple pour n quelconque s'obtiendra alors en complétant les matrice considérées par des termes tous nuls.
D'après I 3.a., il suffit de trouver trois matrices carrées d'ordre 2 telles que :

$$A^2 \neq 0, \quad B^2 \neq 0, \quad (AB)^2 = 0 \quad \text{et} \quad AB \neq 0.$$

On peut prendre : $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
Dans cet exemple, on a :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq 0, \quad B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \neq 0, \quad AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \neq 0, \quad (AB)^2 = 0.$$

On conclut que l'on n'a pas : $\forall f, g \in \mathcal{U}(E), \quad f \circ g \in \mathcal{U}(E)$.

5. • Soit $f \in \mathcal{U}(E)$. D'après 4.a. : $\forall \alpha \in \mathbb{C}, \quad \alpha f \in \mathcal{U}(E)$.
Il en résulte que $\mathcal{U}(E)$ est étoilé par rapport à 0.

• Soient $f, g \in \mathcal{U}(E)$. On peut joindre 0 et f par un chemin continu dans $\mathcal{U}(E)$ (en ligne droite, puisque $\mathcal{U}(E)$ est étoilé par rapport à 0). De même, on peut joindre 0 et g par un chemin continu dans $\mathcal{U}(E)$. Par transitivité, on peut alors joindre f et g par un chemin continu dans $\mathcal{U}(E)$.
On conclut :

$$\boxed{\mathcal{U}(E) \text{ est connexe par arcs}}$$

Partie VII

1. • On a :

$$u^* = \left(\frac{1}{2}(f + f^*)\right)^* = \frac{1}{2}(f^* + f) = u,$$
$$v^* = \left(\frac{1}{2\mathrm{i}}(f - f^*)\right)^* = -\frac{1}{2\mathrm{i}}(f^* - f) = v,$$

donc u et v sont hermitiens.

• On a :

$$u \circ v = \left(\frac{1}{2}(f + f^*)\right) \circ \left(\frac{1}{2\mathrm{i}}(f - f^*)\right) = \frac{1}{4\mathrm{i}}(f^2 - f \circ f^* + f^* \circ f - f^{*2}) = \frac{1}{4\mathrm{i}}(f^2 - f^{*2}) = 0$$
$$v \circ u = \left(\frac{1}{2\mathrm{i}}(f - f^*)\right) \circ \left(\frac{1}{2}(f + f^*)\right) = \frac{1}{4\mathrm{i}}(f^2 + f \circ f^* - f^* \circ f - f^{*2}) = \frac{1}{4\mathrm{i}}(f^2 - f^{*2}) = 0,$$

donc : $u \circ v = v \circ u$.

2. D'après le cours, puisque u et v sont hermitiens, u et v sont diagonalisables (dans une base orthonormale de E). D'après le cours, puisque la famille (u, v) est formée d'endomorphismes diagonalisables et qui commutent deux à deux, cette famille est co-diagonalisable, c'est-à-dire qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que les matrices U de u et V de v dans $\mathcal{B}$ soient diagonales. Il est clair alors que la matrice de f dans $\mathcal{B}$ est $U + \mathrm{i}V$, qui est diagonale.

On conclut que f est diagonalisable.

3. D'après 2., il existe donc une base $\mathcal{B}$ de E et $(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ tels que : $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \mathrm{diag}\,(\lambda_1, ..., \lambda_n)$.

Pour chaque $i \in \{1, ..., n\}$, il existe $\mu_i \in \mathbb{C}$ tel que $\mu_i^2 = \lambda_i$.

En notant h l'endomorphisme de E tel que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(h) = \mathrm{diag}\,(\mu_1, ..., \mu_n)$, on a $h^2 = f$, donc $\mathcal{R}(f) \neq \varnothing$.

On conclut :

$$\boxed{f \in \mathcal{U}(E)}$$

* *