Préparation à l'agrégation interne de mathématiques

Jean-Marie Monier

pour mercredi 10 novembre 2010

Exercices de révision

Thème : Équations différentielles

Cours

Réviser les équations différentielles.

Il y a deux niveaux de travail :

Niveau I : Élémentaire :

Équations différentielles linéaires du premier ordre, équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants et avec second membre polynôme-exponentielle

Référence : Jean-Marie Monier, Analyse MPSI, Cours, exercices-types, méthodes, exercices résolus, Dunod, 9 782 100 498 376, chapitre 10, pages 337-358

Niveau II : Moyen :

Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients variables, équations différentielles non linéaires, systèmes différentiels, théorèmes de Cauchy

Référence : Jean-Marie Monier, Analyse MP, Cours, exercices-types, méthodes, exercices résolus, Dunod, 9 782 100 510 399, chapitre 4, pages 219-286.

Exercices

Les exercices sont tirés du livre de cours Analyse MPSI pour le niveau I, Analyse MP pour le niveau II.

Niveau I

1 Résoudre l'équation différentielle (E) $xy' + 2y = \dfrac{x}{x^2+1}$, d'inconnue $y : I \longrightarrow \mathbb{R}$,
pour $I =]-\infty\,;0[$, $I =]0\,;+\infty[$, $I = \mathbb{R}$.

2 Résoudre l'équation différentielle (E) $y'' - 2y' + y = \mathrm{e}^{x}\sin x$, d'inconnue $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ (variable x).

3 Résoudre l'équation différentielle (E) $y'' + y = \mathrm{Max}\,(x, 0)$, d'inconnue $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ (variable x).

Niveau II

1 Résoudre le problème de Cauchy (C) $\begin{cases} y' = y^2\cos x \\ y(0) = \dfrac{1}{3} \end{cases}$ d'inconnue y, variable x.

2 Trouver toutes les applications $f :]-1\,;1[\longrightarrow \mathbb{R}$ dérivables telles que :

$$\forall\, x \in]-1\,;1[,\quad f'(x)f(-x) = \frac{1}{1-x^2}.$$

3 Résoudre le système différentiel

$$\begin{cases} x' = 3x + y - z + 1 \\ y' = x + y + z + \mathrm{e}^{\,t} \\ z' = 2x + 2z \end{cases}$$

d'inconnues $x, y, z : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, variable t.

4 Résoudre l'équation différentielle (E) $(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 2$, d'inconnue $y :]0\,;1[\longrightarrow \mathbb{R}$.

5 On considère le problème de Cauchy (C) $\begin{cases} y' = x^2 + y^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$ d'inconnue y dérivable sur un intervalle, et à valeurs réelles.

a) Montrer que (C) admet une solution maximale et une seule.
On note y celle-ci et I son intervalle de définition.

b) Montrer que I est symétrique par rapport à 0 et que y est impaire.

c) Démontrer qu'il existe $a \in]0\,;+\infty[$ tel que $I =]-a\,;a[$.
À cet effet, on pourra raisonner par l'absurde et considérer $\dfrac{y'}{y^2}$.

d) Tracer l'allure de la courbe représentative de y.

****