NOM : Prénom :
Numéro étudiant : Signature :

Exercices. À rédiger sur une feuille séparée. Il est inutile de recopier les énoncés. On demande des démonstrations courtes et précises, se référant exclusivement aux *définitions* et *axiomes* donnés en cours.

1) Démontrer que le couple (A, B) défini par

$$A = \{r \in \mathbb{Q}\,;\ r^{2007} \leq 2\}\,, \quad B = \{r \in \mathbb{Q}\,;\ r^{2007} > 2\}$$

est une *coupure* de $\mathbb{Q}$.

2) Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $b \geq a > 0$. Démontrer que l'ensemble

$$A = \{x \in \mathbb{R}\,;\ a \leq x^2 \leq b\}$$

admet un élément maximal et un élément minimal, et que A *n'est pas un intervalle* de $\mathbb{R}$.

3) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On suppose que I admet une borne supérieure et une borne inférieure mais pas d'élément minimal ni d'élément maximal. Démontrer qu'il existe des réels c et d tels que

$$I = \{x \in \mathbb{R}\,;\ c < x < d\}\,.$$

Questionnaire à choix multiples. Entourer les bonnes réponses directement sur le verso de cette feuille. Il peut y avoir plusieurs bonnes réponses par question. Pour chaque question, le point sera attribué si toutes les bonnes réponses, et seulement elles, sont entourées.

L'usage de toute calculatrice est interdit.

Tourner la page S.V.P.

Question 1. Soit $B = \{x \in \mathbb{R}\,;\ x^3 < 2\}$. Comme sous-ensemble de $\mathbb{R}$, B admet :

un majorant	une borne supérieure	un élément maximal	un minorant	une borne inférieure

Question 2. Soit $A = \{r \in \mathbb{Q}\,;\ r^3 < 2\}$. Comme sous-ensemble de $\mathbb{Q}$, A admet :

un majorant	une borne supérieure	un élément maximal	un minorant	une borne inférieure

Question 3. L'ensemble $\{y = x^2 - x - 1\,;\ x \in \mathbb{R}\}$ admet :

-2 comme borne inférieure	-2 comme minorant	un minorant négatif	2 comme majorant

Question 4. Soit $a = (1 - \sqrt{5})/2$.

$\frac{1}{a} < -2$	$\frac{1}{\lvert a\rvert} < 2$	$\frac{1}{\lvert a\rvert} \leq 2$	$E(\frac{1}{\lvert a\rvert}) = 1$	$E(\frac{1}{a}) = -1$

Question 5. Indiquer les inégalités vraies pour tout $x \in [-1, 1]$ parmi :

$\dfrac{x^2}{x^2+1} \geq \dfrac{\lvert x\rvert^3}{2x^2+1}$	$\dfrac{x^2}{x^2+1} \leq \lvert x\rvert$	$\dfrac{x^2}{x^2+1} \leq x$	$\dfrac{x^2}{x^2+1} > x$	$\dfrac{x^2}{x^2+1} > \lvert x\rvert$

Question 6. Indiquer les égalités vraies pour tout $x \in \mathbb{R}$ parmi :

$\sqrt{x^6} = x^3$	$\sqrt{(x^2-1)^2} = x^2 - 1$	$\sqrt[3]{x^6} = x^2$	$\sqrt{(x^2+1)^3} = \sqrt[3]{(x^2+1)^2}$	$\sqrt[3]{(x^2+1)^3} = x^2 + 1$

Question 7. Soient $x, y \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Quelle est la formule donnant $(x+y)^n$?

$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k y^{n-k}$	$\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{n!x^k y^{n-k}}{k!(n-k)!}$	$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{n!x^k y^{n-k}}{k!(n-k)!}$	$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{n!x^k y^{n-k}}{(n-k)!}$	$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k y^{n-k}$

Question 8. Indiquer les inégalités vraies pour tout $x \in [-1, 1]$ et tout $y \in [3, 9]$:

$\lvert y - x\rvert \leq 8$	$\lvert y - x\rvert \geq 2$	$\frac{1}{x-y} \leq -\frac{1}{2}$	$\lvert x + y\rvert \leq 10$	$\frac{1}{x+y} \geq \frac{1}{10}$