Fonctionnement des menus TESTS et Intervalle de confiance des calculatrices

Intervalle de fluctuation – intervalle de confiance
D'un point du vue théorique ces deux intervalles sont très différents :

Intervalle de fluctuation : ses bornes dépendant uniquement de la loi de la variable considérée et de la taille de l'échantillon dans le cas d'un échantillonnage;

Intervalle de confiance : ses bornes sont aléatoires et dépendent de l'échantillon effectivement observé.

Il est important de comprendre que si on change d'échantillon, on change les bornes de l'intervalle de confiance mais pas celles de l'intervalle de fluctuation.

Deux situations type : étude d'une proportion (programmes) et étude d'une valeur moyenne.

Première partie : étude d'une proportion

On dispose d'une population (population mère) sur laquelle on étudie la présence ou non d'un caractère (quantitatif ou qualitatif). On extrait de cette population un échantillon aléatoire simple de n individus. C'est-à-dire qu'on suppose qu'il est possible de modéliser l'échantillon par une suite de n variables aléatoires indépendantes suivant toutes une loi de Bernoulli.
Notations : p désigne la proportion du caractère dans la population mère, n désigne la taille de l'échantillon et f désigne la fréquence observée pour le caractère sur l'échantillon prélevé.
En général n est connu, p est connu ou inconnu et f est une valeur expérimentale qui se calcule à partir de l'échantillon.
Résultat général : La loi de la variable aléatoire F_n définie comme fréquence observée sur un échantillon aléatoire de taille n, est proche, sous certaines conditions, de celle de la loi normale de moyenne p et de variance $p(1-p)/n$.
Les conditions de validité indiquées dans les programmes sont : $n \geq 30$; $np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 5$. En fait l'échantillon doit être assez grand et la valeur de p ne doit pas être trop petite ni trop grande.

Application à la prise de décision - les tests statistiques

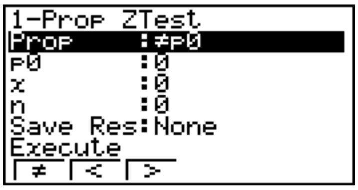
Dans ce cas, p est connu et on confronte la valeur de f observée sur un échantillon aux bornes de l'intervalle de fluctuation asymptotique de F_n. C'est la démarche des tests statistiques.
Sur les calculatrices les tests construits avec la loi normale sont référencés Z-Test et sur les derniers modèles il y a précisément les tests sur une proportion, pour un ou deux échantillons.
TI : Menu stats puis onglet TESTS et choix 5: Z-Test 1 Prop
Casio : Menu Stats, onglets TEST puis Z et 1-PROP
HP prime : Application inférence

Exemple Extrait du document ressource TS
On admet que dans la population d'enfants de 11 à 14 ans d'un département français le pourcentage d'enfants ayant déjà eu une crise d'asthme dans sa vie est de 13%.
Un médecin d'une ville de ce département est surpris du nombre important d'enfants le consultant ayant des crises d'asthmes et en informe les services sanitaires. Ceux–ci décident d'entreprendre une étude et d'évaluer la proportion d'enfants de 11 à 14 ans ayant déjà eu des crises d'asthme.
Ils sélectionnent de manière aléatoire 100 jeunes de 11 à 14 ans de la ville et l'étude réalisée auprès de ces 100 personnes a dénombré 19 jeunes ayant déjà eu des crises d'asthme. Que pouvez-vous conclure ?

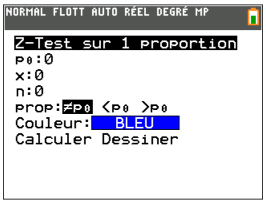
Ici la fréquence observée est f = 0,19 avec n = 100 et p = 0,13. Autrement dit on fait l'hypothèse que la population de la ville se comporte comme celle du département (dans le test on notera p_0 = 0,13). La règle de décision est associée à un risque d'erreur en général noté α. On détermine l'intervalle (symétrique ou pas) dans lequel fluctue une proportion $1 - \alpha$ des fréquences observées sur un échantillon de taille 100 et on regarde si f est ou non dans cet intervalle.

Mise en œuvre calculatrice

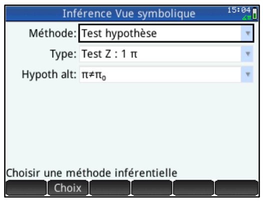
Casio
Menu STAT
Onglets TEST
Onglets Z puis 1-p



TI (TI 83 Premium CE)
Touche stats
Onglet TESTS
Choix Z-Test 1 prop…

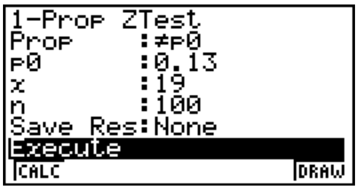


HP Prime
Touche Apps
Choix Inférence

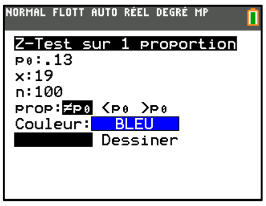


Dans un premier temps, comme dans les programmes, on choisit l'hypothèse alternative $p \neq p_0$ c'est-à-dire que la décision se prend à partir d'un intervalle de fluctuation symétrique (le risque est rejeté par moitié à droite et à gauche).
On complète : p_0 = 0,13 , x = 19 (nombre d'occurrences du caractère sur l'échantillon) et n = 100. Noter que sur la HP Prime il faut appuyer sur la touche Num pour accéder à l'écran de paramétrage du test.

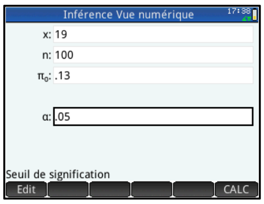
Casio



TI

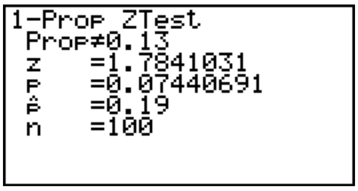


HP Prime

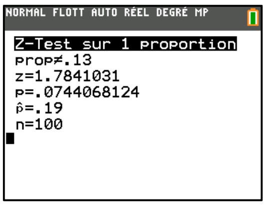


La calculatrice ne demande pas de niveau de risque, sauf chez l'éditeur HP … Curieux? Non? Voyons l'affichage:

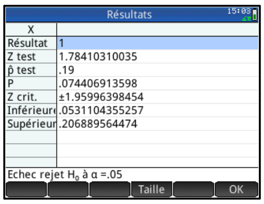
Casio



TI



HP Prime



Comment dès lors faire le lien avec la solution du document ressource : «*la valeur 0,19 est à l'intérieur de l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% ([0,06 ; 0,20]), On en conclut qu'il n'est pas nécessaire de réaliser une enquête supplémentaire*» ?
Pour comprendre l'affichage de la calculatrice il faut faire des maths!!

- Editeurs CASIO et TI

La calculatrice affiche une valeur $z \approx 1{,}784$ qui est la valeur observée sur l'échantillon pour la variable aléatoire centrée réduite $F_n{}^*$ qui suit la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$.

Nous savons que $F_n{}^* = \dfrac{F_n - p}{\sqrt{p(1-p)/n}}$ donc dans notre exemple : $F_n{}^* = \dfrac{F_n - 0{,}13}{\sqrt{0{,}13 \times 0{,}87/100}}$ et $z = \dfrac{0{,}19 - 0{,}13}{\sqrt{0{,}13 \times 0{,}87/100}} \approx 1{,}7841031$

Ensuite, la calculatrice affiche une probabilité $p \approx 0{,}0744$ qui est en fait la probabilité, pour la variable $F_n{}^*$, de prendre ses valeurs à l'extérieur de l'intervalle $[-z ; z]$.
Ainsi l'affichage de la calculatrice doit être lu ainsi : "si la proportion d'asthmatiques de la ville était de 13%, l'erreur commise en acceptant de trouver 19 asthmatiques sur un échantillon de taille 100 est de 7,44%.
Pour un risque d'erreur de 5%, on ne remet donc pas en cause l'hypothèse.

Noter que si on change l'hypothèse alternative en $p > p_0$, on trouve cette fois z ≈ 1,784 et $p \approx 0{,}037$. Donc une probabilité d'erreur à gauche de 3,7%. Au niveau de risque de 5%, on prendra alors la décision de dire que la proportion d'asthmatiques est supérieure à celle du département.

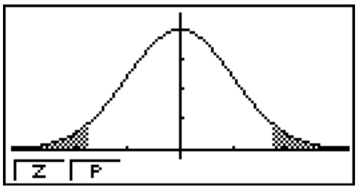
- Editeur HP

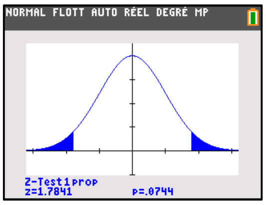
L'affichage de la calculatrice est plus complet, on retrouve la valeur z ≈ 1,784 notée ici Ztest et la probabilité $p \approx 0{,}037$. L'indication Z crit ≈ ±1,96 donne les fractiles de la loi normale centrée réduite qu'il faut utiliser compte tenu du niveau de risque. Enfin, les indications Inférieur et Supérieur donnent en fait les bornes de l'intervalle de fluctuation asymptotique de F_n.

Instruction graphique TI et Casio

Chez ces deux éditeurs, on peut choisir le calcul ou le dessin pour afficher les résultats du test. Voici les affichages lorsqu'on sélectionne cette option graphique :

Casio **TI**

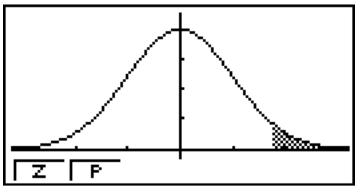


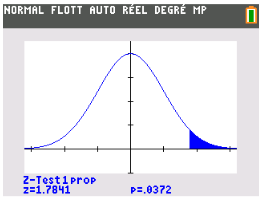


Les onglets Z et P fournissent
Les valeurs z et p.

Voici maintenant les graphiques obtenus si on change l'hypothèse alternative en $p > p_0$:,

Casio **TI**





Application à l'estimation – intervalle de confiance

Reprenons la situation de l'exercice avec un autre point de vue.

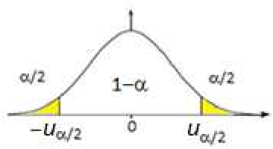
On dispose d'un échantillon aléatoire de taille 100 sur lequel on a dénombré 19 jeunes ayant déjà eu des crises d'asthme.

Pour un niveau de confiance donné (noté $1 - \alpha$), on peut déterminer un intervalle dans lequel se trouve la véritable proportion de personnes ayant déjà eu des crises d'asthme avec une probabilité de $(1 - \alpha)$. C'est ce qu'on appelle intervalle de confiance au niveau de confiance $1 - \alpha$.

Les calculatrices permettent de déterminer cet intervalle de confiance qui dans les programmes du lycée est rencontré en seconde et en terminale. Dans les formules ci-dessous, f désigne la fréquence observée sur un échantillon aléatoire de taille n ($n > 30$)

- En seconde on trouve une forme simplifiée : $\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}, f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$
- En terminale l'écriture de l'intervalle de confiance est obtenu par application du

théorème de Moivre Laplace : $\left[f - u_{\alpha/2}\frac{\sqrt{f(1-f)}}{\sqrt{n}}, f + u_{\alpha/2}\frac{\sqrt{f(1-f)}}{\sqrt{n}}\right]$ où $u_{\alpha/2}$ désigne le fractile

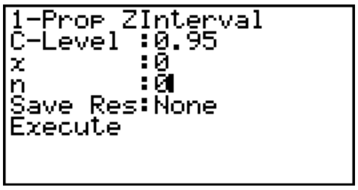


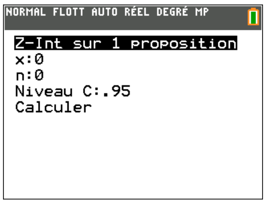
"symétrique" de la loi normale centrée réduite au niveau de "risque global " α.

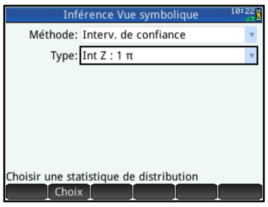
Les calculatrices utilisent cette deuxième écriture de l'intervalle de confiance et f est notée $\hat{p}$.

Mise en œuvre calculatrice

Casio	**TI (TI 83 Premium CE)**	**HP Prime**
Menu STAT	Touche stats	Touche Apps
Onglets INTR	Onglet TESTS	Choix Inférence
Onglets Z puis 1-p	Choix A : Z-Int 1 prop…	

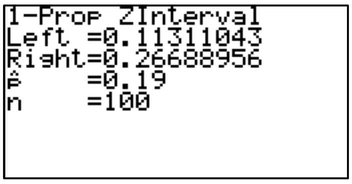


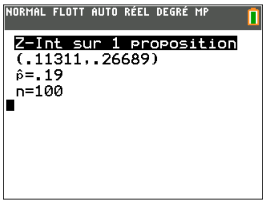


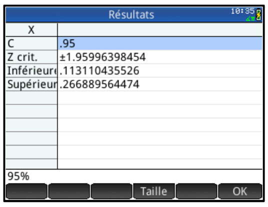


Le niveau de confiance est par défaut de 95% le fractile symétrique associé est 1,96. On complète le nombre d'occurrences dans l'échantillon (ici x = 19) et la taille de l'échantillon. Voici les résultats obtenus :

Casio **TI** **HP Prime**

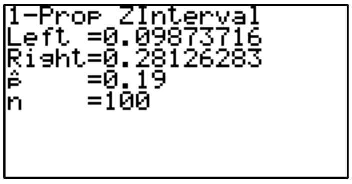


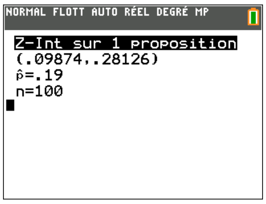


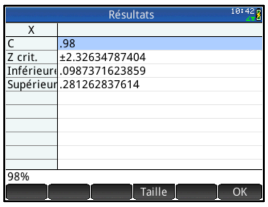


On peut modifier facilement le niveau de confiance et constater que pour un meilleur niveau de confiance, par exemple 98%, l'amplitude de l'intervalle devient plus grande. En effet dans le cas, $u_{\alpha/2}$ est supérieur à 1,96 et la marge d'erreur de l'estimation, soit $u_{\alpha/2}\dfrac{\sqrt{f(1-f)}}{\sqrt{n}}$, augmente.

Casio **TI** **HP Prime**







Enfin, sur les écrans de la HP Prime on constate l'affichage "Z crit." qui indique en fait les valeurs $\pm u_{\alpha/2}$ c'est-à-dire les bornes de l'intervalle de fluctuation de la loi normale centrée réduite qui sont utilisées pour construire l'intervalle de confiance affiché.

Deuxième partie : étude d'une valeur moyenne

Cette partie n'est pas abordée dans les programmes de lycée.

<u>Modèle mathématique associé</u>

◊ On considère un caractère quantitatif défini sur une population mère Ω. Une observation de la valeur de ce caractère est la réalisation d'une variable aléatoire X définie sur Ω, on note μ et σ² l'espérance et la variance de la loi suivie par X.

◊ Un échantillon aléatoire de taille n est toujours une suite de n variables aléatoires (X_1; … ;X_n) mutuellement indépendantes et toutes de même loi identique à celle de X,

◊ On définit la ***moyenne empirique d'échantillon***: $\overline{X}_n = \dfrac{1}{n}\sum_{1\le i\le n} X_i$ qui est une variable aléatoire.

Étudier la distribution d'échantillonnage, c'est caractériser la loi de cette nouvelle variable aléatoire.

L'indépendance des variables aléatoires (X_1; … ;X_n) permet de montrer assez vite que : $E(\overline{X}_n)=\mu$; $V(\overline{X}_n)=\dfrac{\sigma^2}{n}$.

On dit que $\overline{X}_n$ est un estimateur sans biais et convergent de μ.

◊ On définit aussi la ***variance empirique d'échantillon*** : $V_n = \dfrac{1}{n}\sum_{1\le i\le n}(X_i-\overline{X}_n)^2$. Il est possible de démontrer que $E(V_n)=\dfrac{n-1}{n}\sigma^2$ donc V_n n'est pas un estimateur sans biais de σ². Voilà pourquoi on définit la ***Variance corrigée d'échantillon*** : $S_n{}^2=\dfrac{1}{n-1}\sum_{1\le i\le n}(X_i-\overline{X}_n)^2$ soit $S_n{}^2=\dfrac{n}{n-1}V_n$. Dans ce cas on a bien E(S_n^2) = σ².

Noter que les menus statistiques des calculatrices affichent deux écart-types : l'écart-type empirique et l'écart-type corrigé qui lui est supérieur (facteur racine carrée de $n/(n-1)$).

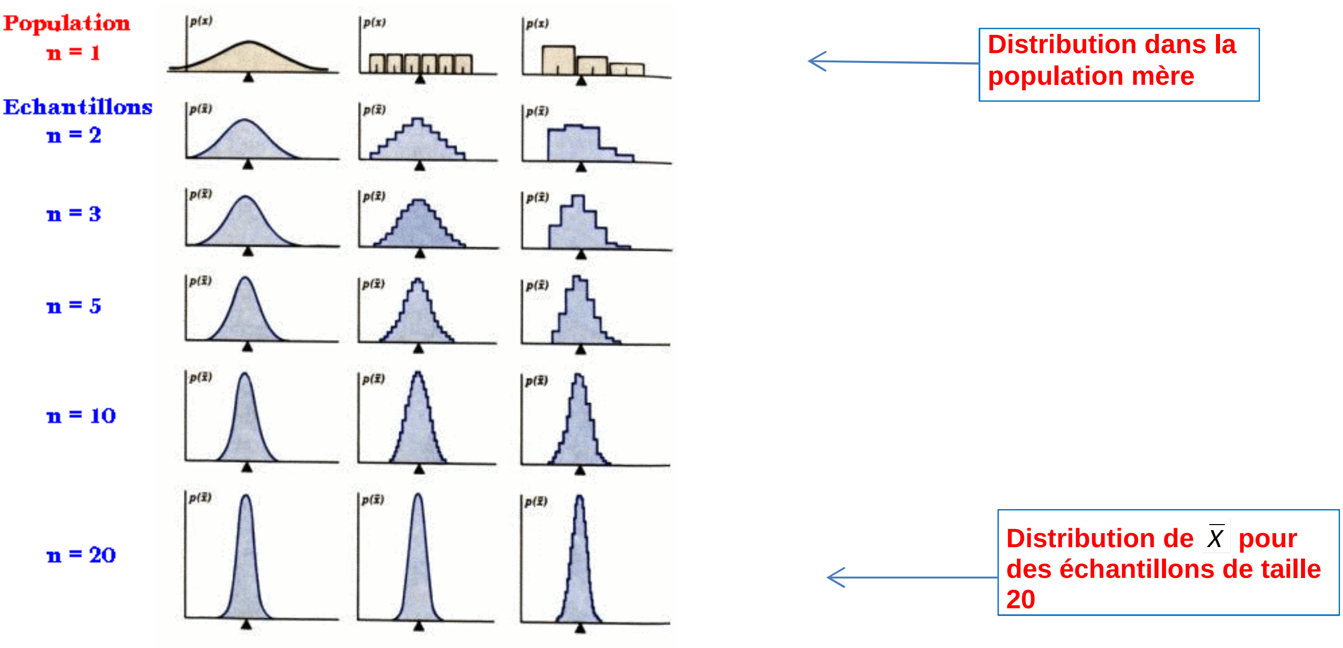
Théorème de la limite centrée : Soit $(X_i)_{i=1,..;n}$ une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées, dont l'espérance est μ et la variance σ^2 . Alors, **si les X_i sont de loi normale ou si n est suffisamment grand** :

◇ Leur somme Σ_n suit approximativement la loi normale $\mathcal{N}(n\mu; n\sigma^2)$

◇ La moyenne d'échantillon $\overline{X}_n$ suit approximativement la loi normale $\mathcal{N}(\mu; \sigma^2/n)$.

Remarques - Si la loi de X est normale, celle des X_i aussi et Σ_n , $\overline{X}_n$ et $\overline{X}_n*$ suivent exactement une loi normale, quelle que soit la taille de l'échantillon. On parle dans ce cas d'échantillon gaussien.

- En pratique, on applique les approximations dès que $n \geqslant 30$ et quelle que soit la loi mère.



Intervalle de confiance pour une moyenne

L'intervalle de confiance est construit de la façon suivante : **(valeur observée sur l'échantillon) ± (marge d'erreur)**

Deux cas se présentent pour le calcul de la marge d'erreur, selon que l'on connait ou pas la variance de la loi mère.

Si la variance de la population est connue

Lorsque la loi mère est gaussienne ou pour $n \geqslant 30$, la variable aléatoire $\overline{X}_n* = \dfrac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ suit alors approximativement la loi normale centrée réduite. Pour un niveau de confiance $1 - \alpha$, la marge d'erreur est : $E_\alpha = u_{\alpha/2}\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Si la variance est inconnue pour un échantillon gaussien

À partir d'un échantillon, on dispose seulement de l'estimateur S^2 de la vraie variance. On peut démontrer que, si la loi de X est normale, la variable aléatoire $T_n = \dfrac{\overline{X}_n - \mu}{S_n/\sqrt{n}}$ suit la loi de Student à $(n - 1)$ degrés de liberté.

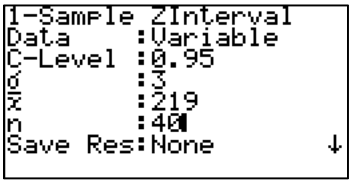
Ce sont les fractiles de cette loi qui permettent de d'écrire la marge d'erreur de l'estimation : $E_\alpha = t_{\alpha/2}\dfrac{s_n}{\sqrt{n}}$

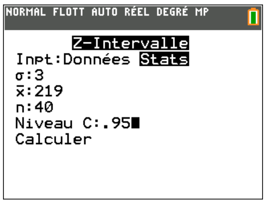
Mise en œuvre calculatrice si la variance est connue

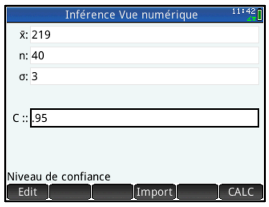
On utilise les fractiles de la loi normale dont les menus à utiliser sont des Z-intervalles de confiance.

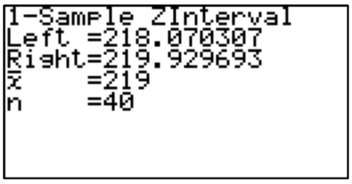
Exemple : on étudie la résistance à l'éclatement (en kg/cm²) d'un réservoir à essence d'un certain fabricant. On considère que cette résistance est distribuée normalement avec une variance de 9.
Des essais sur un échantillon de 40 réservoirs ont conduit à une résistance moyenne à l'éclatement de 219kg/cm².
On veut estimer au niveau de confiance de 95%, la résistance moyenne des réservoirs produits.

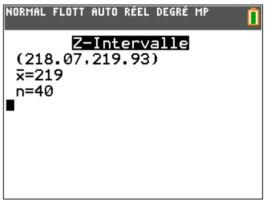
Casio	TI (TI 83 Premium CE)	HP Prime
Menu STAT	Touche stats	Touche Apps et Inférence
Onglets INTR	Onglet TESTS	Choix Intervalle de confiance
Onglets Z puis 1-S	Choix 7 : Z-Intervalle	Choix Intervalle Z : 1-µ

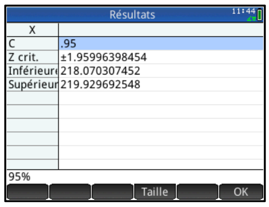












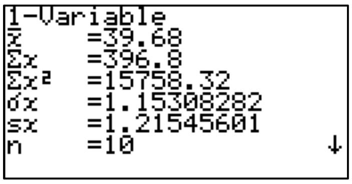
Mise en œuvre calculatrice si la variance est connue
On utilise les fractiles de la loi de Student donc les menus à utiliser sont des T-intervalles de confiance.

Exemple : On s'intéresse au diamètre de tiges usinées sur un tour automatique. On suppose que ce diamètre est normalement distribué. Sur un échantillon de dix tiges prélevées au hasard on a obtenu les résultats présentés dans le tableau ci-dessous.

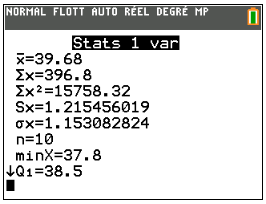
Diamètre en mm	39.5	40.6	38.4	37.8	39.4	39.9	41.5	40.0	38.5	41.2

Traitement statistique de ces données d'échantillon :

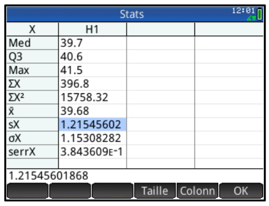
Casio



TI (TI 83 Premium CE)

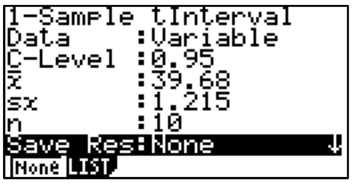


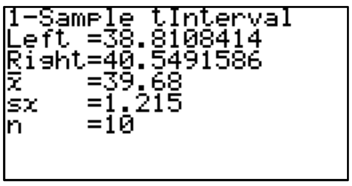
HP Prime



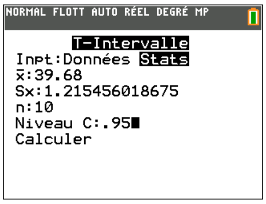
Détermination de l'intervalle

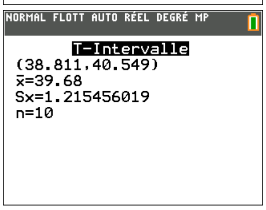
Casio
Menu STAT
Onglets INTR
Onglets *t* puis 1-S





TI (TI 83 Premium CE)
Touche stats
Onglet TESTS
Choix 8 : T-Intervalle





HP Prime
Touche Apps et Inférence
Choix Intervalle de confiance
Choix Intervalle T : 1-µ