Équations différentielles linéaires

Il importe de connaître :
- Le théorème fondamental d'existence et d'unicité (Cauchy-Lipschitz « linéaire ») et ses conséquences sur la structure de l'espace des solutions.
- Les méthodes pratiques de résolution d'équations différentielles linéaires scalaires ou de systèmes différentiels linéaires : variation d'une ou plusieurs constantes, changement de variable, recherche de solutions qui sont des sommes de séries entières, utilisation de la réduction, utilisation de l'exponentielle de matrice, ...

1 On considère l'équation différentielle (E) : $\sqrt{|t|}\, y' - y = t$.

1. Résoudre (E) sur $\mathbf{R}_+^*$ puis sur $\mathbf{R}_-^*$
2. Montrer que (E) possède une unique solution u définie sur $\mathbf{R}$.

2 Résoudre sur $\mathbf{R}$ l'équation différentielle $y'' + y = \cos t$.

3 Résoudre sur $]0, \pi/2[$ l'équation différentielle $y'' - \tan t\, y' + 2y = 0$ après avoir constaté que $\varphi(t) = \sin t$ en est solution.

4 On considère l'équation différentielle (E) : $(x^2+1)^2 y'' + 2x(1+x^2)y' + y = \sqrt{1+x^2}$.

1. Vérifier que si l'on pose $x = \tan t$ et $z(t) = y(x) = y(\tan t)$ alors z vérifie l'équation différentielle
$$\text{(E')} : z'' + z = \frac{1}{\cos t}.$$
2. Résoudre (E') sur $]-\pi/2, \pi/2[$.
3. Résoudre (E) sur $\mathbf{R}$.

5 On considère l'équation différentielle (E) : $t^2 y'' + (t - t^2)y' - y = 0$.

1. Montrer que (E) admet sur $\mathbf{R}_+^*$ une solution de la forme $y = a + \dfrac{b}{t}$.
2. Trouver les solutions de (E) développables en série entière puis en déduire les solutions de (E) sur $\mathbf{R}_+^*$ puis sur $\mathbf{R}$.

6 Soient $I \subset \mathbf{R}$ un intervalle, $p, q : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues et f une solution **non nulle** de l'équation différentielle.
$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0 \qquad (\mathbf{E}).$$

1. Montrer que f ne peut avoir de zéro commun avec sa dérivée.
2. Montrer que tout zéro t_0 de f possède un voisinage ouvert V sur lequel f ne s'annule qu'en t_0.
3. Soit S segment un de I. Montrer que f ne possède qu'un nombre fini de zéros dans S.
4. Soit φ et ψ deux solutions linéairement indépendantes de ($\mathbf{E}$).
   (a) Montrer que leur wronskien $w = \varphi\psi' - \varphi'\psi$ ne s'annule pas sur I.
   (b) Montrer que φ et ψ n'ont pas de zéros communs.
   (c) Montrer que si φ et ψ sont réelles alors ψ possède un unique zéro dans tout intervalle $]t_0, t_1[$ limité par deux zéros consécutifs de φ (s'il en existe).

7 Donner les solutions réelles des systèmes différentiels suivants :

$$(\mathcal{S}) \left\{ \begin{array}{lcl} x_1' & = & 6x_1 + 3x_2 - 3t + 4e^{3t} \\ x_2' & = & -4x_1 - x_2 + 4t - 4e^{3t} \end{array} \right. \qquad (\mathcal{S}') \left\{ \begin{array}{lcl} x_1' & = & x_1 + 2x_2 \\ x_2' & = & -4x_1 - 3x_2 \end{array} \right. .$$

8 Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer le polynôme caractéristique de A. En déduire, pour t réel, le calcul de $\exp(tA)$.
2. Résoudre le système différentiel $(\mathcal{S}) \left\{ \begin{array}{lcl} x_1' & = & 2x_1 + x_3 \\ x_2' & = & x_1 - x_2 - x_3 \\ x_3' & = & -x_1 + 2x_2 + 2x_3 \end{array} \right.$.

9 On considère le système linéaire à coefficients constants $X' = AX$, où A est une matrice carrée d'ordre n à coefficients réels.

1. On suppose A symétrique définie positive. Montrer que pour toute solution X, $t \mapsto \|X(t)\|$ est croissante.
2. On suppose A antisymétrique ; montrer que les solutions sont bornées. (Utiliser l'exponentielle).
3. On suppose A antisymétrique et $n = 3$. Quelles sont les solutions constantes ? Montrer que les courbes intégrales sont des arcs de cercle. (Montrer qu'une courbe intégrale est plane, incluse dans une sphère).

Exemples d'équations différentielles non linéaires

Soient E un espace vectoriel de dimension finie, I un intervalle ouvert de $\mathbf{R}$, Ω un ouvert de E et $f : I \times \Omega \to E$ une application de classe $\mathscr{C}^1$. On considère l'équation différentielle

$$\text{(E)} \qquad x' = f(t, x).$$

Soit $(t_0, x_0) \in I \times \Omega$. Une solution de (E) de condition initiale (t_0, x_0) est une application x de classe $\mathscr{C}^1$ définie sur un sous-intervalle J (inconnu) contenant t_0, à valeurs dans Ω, et satisfaisant : $x(t_0) = x_0$ et $x'(t) = f(t, x(t))$ pour tout $t \in J$.

Le théorème de Cauchy-Lipschitz affirme que, pour $(t_0, x_0) \in I \times \Omega$,
– (E) possède des solutions de condition initiale (t_0, x_0) (existence locale) ;
– si $x_1 : J_1 \to E$ et $x_2 : J_2 \to E$ sont deux solutions alors $x_1 = x_2$ sur $J_1 \cap J_2$ (unicité locale) ;
– il existe un intervalle **ouvert** $J_{\max}$ et une solution $x_{\max} : J_{\max} \to E$ qui est dite solution maximale dans le sens suivant : pour toute solution $x : J \to E$, $J \subset J_{\max}$ et x est la restriction de $x_{\max}$ à J (**existence et unicité d'une solution maximale**).

10 Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une solution maximale de l'équation différentielle : $x' = \dfrac{1 + t^2}{1 + t^2 + x^2}$.

1. Montrer que f est strictement croissante sur I.
2. On suppose que $\sup I = b < +\infty$. Montrer alors que f est majorée sur I puis aboutir à une contradiction en utilisant le caractère maximal de f.
3. Montrer que $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = +\infty$.

11 Soit $f : I \to \mathbf{R}$ une solution maximale de l'équation différentielle $x' = x^2 + t^2$.

1. Montrer que f est strictement croissante sur I.
2. On suppose que $\sup I = +\infty$. Montrer qu'alors $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = \lim\limits_{t \to +\infty} f'(t) = +\infty$ puis aboutir à une contradiction et conclure que I est majoré.
3. Montrer que l'équation différentielle $x' = x^2 + t^2$ admet une unique solution impaire. (Indication : utiliser la fonction $g : t \mapsto -f(-t)$).