Approximations du nombre π

Exercice 1 :

Pour tout entier n ≥0, soit a_n (resp b_n) le demi périmètre du polygone régulier à 6×2^n cotés circonscrit (resp. inscrit) dans le cercle de rayon 1.

1°) Montrer que l'on a $a_0 = 2\sqrt{3}$, b_0=3 et ∀ n ∈ ℕ, $a_{n+1} = \frac{2a_nb_n}{a_n+b_n}$ et $b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1}b_n}$

2°) Montrer que ∀ n ∈ ℕ, $a_{n+1} - b_{n+1}=\frac{a_{n+1}b_n}{(a_{n+1}+b_{n+1})(a_n+b_n)}(a_n - b_n)$

3°) En déduire que (a_n) et (b_n) convergent vers une même limite notée π.

4°) Donner une majoration de $\delta_n = a_n - b_n$ en fonction de n

Méthode d'Archimède
(287-212 av JC)
Géométrie, suites

Exercice 2 :

1°) soit (u_n) une suite telle que $0 \leq u_0 < 1$ et ∀ n ∈ ℕ, $u_{n+1}=\sqrt{\frac{1+u_n}{2}}$.

Prouver que la suite (v_n) définie par : $v_n = \prod_{i=1}^{n} u_i$ est convergente et calculer sa limite

2°) En déduire la formule de Viète $\frac{2}{\pi}=\sqrt{\frac{1}{2}} \times \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \times$ ....

Formule de Viète (1540-1603)
Produit infini de suites

Exercice 3 :

On note C le cercle trigonométrique (exo 1). Soit S_n(resp. T_n) la longueur du polygone régulier à 2^n cotés inscrit dans C (resp. circonscrit à C).

1°) Etablir que $S_n=2^{n+1}\sin\frac{\pi}{2^n}$, $T_n = 2^{n+1}\tan\frac{\pi}{2^n}$ et $S_n \leq 2\pi \leq T_n$

2°) a) Montrer qu'il existe un couple (α, β) de nombres réels et un seul tel que la fonction x⟼α sinx + β tanx – x soit dominée à l'ordre 5 au voisinage de 0. Soit f la fonction ainsi déterminée.
b) Trouver la partie principale de f au voisinage de 0.
c) Soit a ∈]0 ;$\frac{\pi}{2}$[. Montrer que , ∀ x ∈ [0 ;a], $0 \leq f(x) \leq \frac{x^5}{20\cos^2 a}$.
d) On pose $U_n = \alpha S_n + \beta T_n$. Déterminer la partie principale et un majorant de $U_n - 2\pi$.
Déterminer n tel que $U_n - 2\pi \leq 10^{-9}$.En déduire une valeur approchée de π à 10^{-8} près.

Méthode de Snellius (1621)
Développement limité
Suites

Exercice 4 :

1°) Montrer que $\frac{\pi}{4}$ =4 arctan $(\frac{1}{5})$ - arctan $(\frac{1}{239})$

2°) Proposer alors une suite (Un) convergeant vers π.

3°) Estimer l'erreur commise au rang n.

4°) En déduire le rang auquel on obtient une approximation à 10^{-10}. près

Formule de Machin (1680 -1751)
Formule de trigonométrie
tan 2 $\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$
développement en série entière de arctan, séries alternées
algorithme à convergence rapide (géométrique)

Exercice 5 :

1°) Soit f la fonction impaire et de période 2π qui vaut x si $0 \leq x \leq \pi$.
Établir que $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

2°) Soit $u_n = \sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i^2}$, soit $v_n = \frac{u_{n+1}u_{n-1}-u_n^2}{u_{n+1}+u_{n-1}-2u_n}$.
Montrer que (v_n) converge un peu plus rapidement que (u_n) vers $\frac{\pi^2}{6}$.

Méthode d'Euler (18ème)

Séries de Fourier
Accélération de convergence : méthode d'Aîtken (Huygens)

Exercice 6 :

1°) Montrer que $\pi = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{16^n}\left(\frac{4}{8n+1} - \frac{2}{8n+4} - \frac{1}{8n+5} - \frac{1}{8n+6}\right)$

2°) En déduire la 10^{12} décimale de π .

Méthode de Plouffe (995)

Approximations du nombre π

Plan proposé par Fabienne Pansier, défendu par Bruno Royer, 16 mars 2011.

Références : P. Eymard et J.-P. Lafon, *Autour du nombre pi*, Hermann ; J.-F. Dantzer, *Mathématiques pour l'agrégation interne,* Vuibert ; J.-P. Delahaye, *Le fascinant nombre pi*, Pour la science.

Commentaires

Il semble opportun de préciser, à l'oral, le statut de pi : essaie-t-on de le définir ou suppose-t-on le connaître ? (Ce point de vue peut changer d'un exercice à l'autre.)

Deux points de vue se sont affrontés (courtoisement) à propos des exercices 1 et 3 :

- pour le premier, il était préférable d'introduire une suite annexe pour démontrer la relation de récurrence à partir des polygones réguliers plutôt que les introduire et les relier a posteriori à pi ; pour le second, l'exercice en tant que tel constituait un exercice technique assez simple sur les suites permettant, par hasard, de trouver des approximations de pi ;

- pour le premier, il valait mieux regrouper les exercices 1 et 3 parce qu'ils provenaient de la même situation géométrique ; pour le second, il était légitime de les séparer au motif que les techniques utilisées étaient différentes (et qu'il était quand même clair, d'après la présentation, qu'il s'agissait de la même situation).

L'exercice 3 a été apprécié des stagiaires, en particulier pour son caractère historique ; un peu moins du préparateur qui trouve le résultat trop miraculeux (et dur à trouver sans plus d'indications !).

La formule de Machin (exercice 4) peut se démontrer sans imagination en appliquant la fonction tangente et en utilisant les formules d'addition ; quelques précautions sont nécessaires. Une autre méthode naturelle consiste à développer $(5+i)^4/(1+239i)$ pour calculer son argument.

L'exercice 5 est de très bon niveau si on arrive à justifier la définition de (v_n), ne pas le mettre si on ne sait pas la justifier.

De façon générale, il faut s'interroger sur la vitesse de convergence de chacune des approximations vers pi : lente (en $1/n^k$), géométrique, quadratique...

L'exercice 6 est à oublier. Remarquons d'abord que la formule est sans intérêt pour le calcul des décimales (convergence géométrique, peut mieux faire). En revanche, elle permet de calculer un chiffre quelconque du développement dyadique sans calculer tous les précédents ; cependant, pour ce faire, on rencontre des problèmes de retenues non triviaux à gérer. Trop dur. Voir cependant [Delahaye], p. 131 pour la culture.

Il manque, de l'avis de tous, au moins un exercice faisant intervenir les probabilités : soit une méthode de Monte-Carlo pour calculer l'aire du disque (tirer au hasard avec la probabilité uniforme un point dans un carré, regarder s'il appartient au cercle inscrit dans le carré, recommencer indépendamment *ad nauseam*, soit un exercice sur l'aiguille de Buffon (voir par exemple [Delahaye], p. 18).

D'autres voulaient un exercice faisant intervenir une intégrale, d'autres encore un exercice portant sur une autre problématique que la sempiternelle question de trouver *yet another* approximation de pi. La preuve de Beukers de l'irrationalité de pi^2 les satisfera tous : voir par exemple [Eymard-Lafon], chap. 4, §4.