Evn (suite)

Exe.1 Soit E un evn réel et V un sous-espace vectoriel de E.

1. Montrer que si V$\neq$ E alors V est d'intérieur vide.
2. Montrer que l'adhérence de V est un sous-espace vectoriel de E.
3. Montrer que tout hyperplan H de E est soit fermé soit dense dans E.

Exe.2 Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces normés. On note $\mathscr{L}_c(E,F)$ l'espace des applications linéaires continues de E dans F.

1. Soit $u \in \mathscr{L}_c(E,F)$.
   (a) Établir l'égalité des trois quantités suivantes :
   $$\sup_{x\neq 0} \frac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E}, \qquad \sup_{\|x\|_E\leqslant 1} \|u(x)\|_F \quad \text{et} \quad \sup_{\|x\|_E=1} \|u(x)\|_F\,;$$
   la valeur commune des ces quantités est notée $\|u\|$.
   (b) Vérifier que l'on a l'inégalité $\|u(x)\|_F \leqslant \|u\|\,\|x\|_E$ pour tout $x \in E$ et que $\|u\|$ est le plus petit nombre réel M vérifiant :
   $$\forall x \in E,\ \|u(x)\|_F \leqslant M\,\|x\|_E.$$
2. Montrer que l'application $u \mapsto \|u\|$ définit une norme sur $\mathscr{L}_c(E,F)$ (dite norme **subordonnée** aux normes choisies sur E et F) et que, pour u et $v \in \mathscr{L}_c(E,E)$,
   $$\|u\circ v\| \leq \|u\|\,\|v\|.$$
3. Montrer que si $u \in \mathscr{L}_c(E,E)$ alors, pour toute valeur propre λ de u, on a : $|\lambda| \leqslant \|u\|$.
4. Étudier la continuité et calculer éventuellement la norme de l'application linéaire :
   $$u : \left|\begin{array}{ccc} \mathscr{C}([0,1],\mathbf{R}) & \to & \mathbf{R} \\ f & \mapsto & f(t_0) \end{array}\right. \quad \text{où } t_0 \in [0,1].$$
   lorsque l'on munit $\mathscr{C}([0,1],\mathbf{R})$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$ puis de la norme $\|\cdot\|_1$ ($\|f\|_1 = \displaystyle\int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t$).

Exe.3 On définit une norme sur $\mathbf{C}[X]$ en posant, pour tout polynôme $P = a_0 + a_1X + \dots a_nX^n \in \mathbf{C}[X]$,
$$\|P\| = \sup_{0\leqslant k\leqslant n} |a_k|.$$

1. (a) Montrer que la boule unité de $\mathbf{C}[X]$ n'est pas compacte.
   (b) En considérant la suite des polynômes $P_N = \displaystyle\sum_{k=0}^{N} \frac{X^k}{2^k}$, montrer que $\mathbf{C}[X]$ n'est pas complet (pour la norme ci-dessus).
2. L'endomorphisme de dérivation $D : P \in \mathbf{C}[X] \mapsto P'$ est-il continu ?
3. Soit $a \in \mathbf{C}$ tel que $|a| < 1$.
   (a) Montrer que l'application linéaire $u : P \in \mathbf{C}[X] \mapsto P(a)$ est continue.
   (b) Montrer que la norme de u est inférieure à $\dfrac{1}{1-|a|}$.
   (c) En considérant la suite des polynômes $P_N = \displaystyle\sum_{k=0}^{N} \frac{\bar{a}^k}{|a|^k} X^k$, montrer que la norme de u vaut $\dfrac{1}{1-|a|}$.

Théorème du point fixe

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. On dit qu'une application $f : E \to E$ est contraction stricte s'il existe $k \in]0,1[$ tel que :

$$\|f(x) - f(y)\| \leqslant k\|x - y\| \text{ pour tous } x, y \in E.$$

1. Un théorème du point fixe

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach et $f : E \to E$ une contraction stricte. Pour a élément de E, on considère la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par $x_0 = a$ et, pour $n \in \mathbf{N}$, $x_{n+1} = f(x_n)$.

1. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers un point fixe de f.
2. Montrer que ce point fixe est unique.
3. On suppose qu'il existe $p \in \mathbf{N}^*$ tel que $f^p = \underbrace{f \circ \ldots \circ f}_{p \text{ facteurs}}$ soit une contraction stricte.

   Montrer que f possède un point fixe unique, qui est limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

2. Quelques exemples et applications [1]

2.1 Deux exemples

1. Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction continue telle que, pour tout x réel, on ait :
$$f(x) = f\left(\frac{x}{5} + 1\right).$$
   En utilisant la suite définie par $x_0 \in \mathbf{R}$ et $x_{n+1} = \dfrac{x_n}{5} + 1$, montrer que f est constante.
2. Soit g la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $g(x) = x + \dfrac{\pi}{2} - \arctan x$.
   (a) Montrer que, pour tous réels x et y, $|g(x) - g(y)| < |x - y|$.
   (b) La fonction g admet-elle un point fixe ?

2.2 Un système non linéaire

On souhaite résoudre le système $(\mathscr{S})$: $\begin{cases} 4x &= \sin(x+y) \\ 3y &= 3 + 2\arctan(x-y) \end{cases}$.

A cette fin, on munit $\mathbf{R}^2$ de la norme $\|\cdot\|_1$ et considère l'application $\psi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ définie par :

$$\psi(x,y) = \left(\frac{1}{4}\sin(x+y), 1 + \frac{2}{3}\arctan(x-y)\right).$$

1. Justifier que l'espace $(\mathbf{R}^2, \|\cdot\|_1)$ est complet et que ψ est une contraction stricte de $(\mathbf{R}^2, \|\cdot\|_1)$.
2. En déduire que le système $(\mathscr{S})$ admet une unique solution dans $\mathbf{R}^2$.

2.3 Une équation intégrale

On munit l'espace $E = \mathscr{C}([0,1], \mathbf{R})$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$ et considère une application continue (non nulle) $N : [0,1]\times[0,1] \to \mathbf{R}$ ainsi qu'un élément g de E. Soit λ un réel et Φ l'application définie sur E par :

$$\Phi(f)(x) = g(x) - \lambda \int_0^1 N(x,y)f(y)\,\mathrm{d}y \text{ pour tout } x \in [0,1].$$

1. Justifier l'existence de $M = \max\limits_{(x,y)\in[0,1]\times[0,1]} |N(x,y)|$.
2. Montrer que $\Phi(f) \in E$.
3. On suppose que $|\lambda| < M^{-1}$. Montrer que Φ est une contraction stricte de E puis en déduire qu'il existe une unique application f de E telle que :
$$g(x) = f(x) + \lambda \int_0^1 N(x,y)f(y)\,\mathrm{d}y \text{ pour tout } x \in [0,1].$$

1. D'après une épreuve CCP MP 2009.