Questions de logique dans l'enseignement supérieur

Quelques pistes pour faire évoluer les pratiques enseignantes

V. DURAND-GUERRIER
Institut Universitaire de formation des Maîtres de Lyon,
Laboratoire Interdisciplinaire de Recherche en Didactique et en Histoire des Sciences et des Techniques,
& Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques de Lyon
Université Claude Bernard Lyon1
43, boulevard du 11 novembre 1918, 69622 Villeurbanne Cedex

vdurand@univ-lyon1.fr

Résumé :
Dans cette communication, nous montrerons que les pratiques ordinaires des enseignants de mathématiques concernant les questions de logique peuvent être mises en relation avec les difficultés des étudiants, et nous donnerons quelques pistes permettant de travailler sur l'articulation entre logique et raisonnement mathématique dans une perspective didactique.

Mots-clés :
Articulation entre disciplines enseignées et compétences professionnelles, logique et raisonnement mathématique, implication, quantification, dispositif de formation, didactique des mathématiques.

I INTRODUCTION

Les difficultés auxquelles sont confrontés les enseignants de mathématiques des premiers cycles universitaires sont souvent analysées comme une conséquence d'une préparation insuffisante des nouveaux étudiants à ce qui va leur être enseigné. Ceci étant dû en particulier à une évolution des programmes qui repousse à l'entrée à l'université un certain nombre de concepts auparavant étudiés au lycée ainsi qu'à une introduction généralisée du formalisme logique qui est souvent considéré comme incontournable pour étudier les mathématiques à ce niveau d'enseignement. D'un autre côté, les travaux de didactique que nous conduisons au sein de notre laboratoire et les expériences d'enseignement en premier cycle universitaire et en formation d'enseignants montrent que de nombreux étudiants sont extrêmement démunis devant les questions de logique. Une analyse épistémologique et didactique des questions de logique et de leur articulation avec le raisonnement mathématique montrent d'une part que les difficultés en logique sont très dépendantes des contenus mathématiques en jeu, et d'autre part que l'on peut proposer aux étudiants des situations permettant de travailler simultanément la construction des connaissances mathématiques et la signification des connecteurs logiques en lien avec les questions de quantification.

Nous présenterons tout d'abord quelques résultats issus des travaux de recherche que nous conduisons au sein de notre laboratoire qui montrent que les pratiques ordinaires des enseignants de mathématiques concernant les questions de quantification et l'usage du symbolisme logique sont très diverses et le plus souvent assez éloignées des normes logique, et que ceci peut être mis en relation avec les difficultés des étudiants dans la conduite des raisonnements et dans la production des preuves mathématiques (Durand-Guerrier &Arsac, 2003). Nous décrirons ensuite brièvement deux modules de formation destinés aux enseignants de mathématiques s'appuyant sur les analyses précédentes et proposant des pistes pour la classe.

II DES PRATIQUES MATHEMATIQUES EN QUESTION

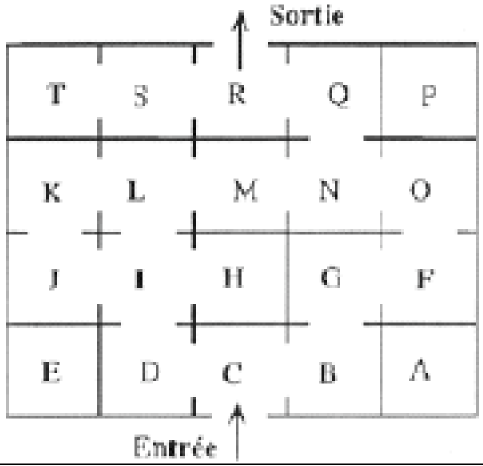
Une spécificité de la logique, lorsqu'on l'étudie d'un point de vue didactique, c'est qu'il y a en quelque sorte un double mouvement de transposition. Le mathématicien, dans son activité mathématique propre, l'utilise le plus souvent comme une technique, sans référence explicite à une théorie logique, et utilise à sa convenance un certain nombre d'ellipses et de raccourcis ; ceci se transpose tout naturellement dans la classe. Parmi ces usages, l'un des plus répandu, à tel point que pour certains auteurs, il s'agit même d'une règle que l'on peut institutionnaliser, est la quantification implicite des énoncés conditionnels universels. Par exemple Dehame et al. (1995) écrivent : « Quand une proposition, notamment une implication ou une équivalence, est donnée sans quantificateur, c'est le quantificateur universel qui est sous entendu. (p.12). Un deuxième usage est celui qui consiste à utiliser massivement, dans les énoncés complexes, la quantification bornée. Ces pratiques usuelles se transportent tout naturellement dans la classe, via la formation universitaire des enseignants pour le second degré, et parce que, à l'université, les enseignants de mathématiques sont en général également mathématiciens. Les deux autres pratiques que nous examinerons sont plus problématiques en ce qu'elles touchent directement à la question de la validité des preuves mathématiques.

II.1 La quantification implicite des énoncés conditionnels

La quantification implicite des énoncés conditionnels est une pratique massive tant parmi les mathématiciens que dans la classe de mathématiques, dans le second degré ou à l'université. Ce constat s'appuie sur de nombreuses observations *naturalistes,* ainsi que sur quelques analyses de manuels dans notre thèse, et, pour la Tunisie, sur Chellougui (2004). Cette pratique massive cache la distinction entre *implication entre propositions*, *implication universellement quantifiée* et *implication ouverte*, et fait disparaître l'importance de l'univers du discours pour établir la vérité d'un énoncé général. L'exemple que nous présentons ci-dessous met en évidence le fait que cet implicite n'est pas partagé par de nombreux élèves, et qu'en outre, il peut conduire les enseignants à proposer des réponses inadaptées dans certaines situations. Il est décrit et analysé de manière très détaillée dans Durand-Guerrier (1999) sous le titre : *L'élève, le professeur et le labyrinthe.*

II.1.1 Présentation de la tâche

Cette tâche a été proposée dans le cadre d'EVAPM2 91 ; il s'agit d'une évaluation proposée par l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public à des enseignants volontaires en fin de seconde, dont les résultats sont publiés dans APMEP (1992). *Le labyrinthe* est le premier exercice d'une série de six présentée aux élèves sous la rubrique : Epreuve portant sur le thème Argumentation – Raisonnement – Expression. Les élèves étaient invités à lire la page d'entrée avant de commencer les exercices. Sur cette page, il est indiqué que cette épreuve, d'une durée de deux heures *« est spécialement destinée à observer votre façon de raisonner et la façon dont vous vous exprimez par écrit.* ». Dans la présentation, les auteurs insistent sur l'importance de la rédaction de la solution, la justification soignée des réponses, et préviennent les élèves que « *certaines questions pourront sembler différentes de ce qu'ils ont l'habitude de faire* ». Le contexte général de l'épreuve et son but (l'amélioration des conditions d'enseignement) étaient également indiqués aux élèves. L'exercice 1 se présentait ainsi :



Lire attentivement les lignes ci-dessous avant de répondre aux questions.
Une personne que nous appellerons X a traversé ce labyrinthe, de l'entré à la sortie, sans jamais être passée deux fois par la même porte. Les pièces sont nommées A, B, C… comme il est indiqué sur la figure. Il est possible d'énoncer des phrases qui aient un sens par rapport à la situation proposée et sur la vérité desquelles on puisse se prononcer (VRAI ou FAUX), ou qui peuvent être telles que les informations que l'on possède ne suffisent pas pour décider si elles sont vraies ou fausses (ON NE PEUT PAS SAVOIR).
Par exemple, la phrase « X est passée par C » est une phrase VRAIE. En effet, on affirme que X a traversé le labyrinthe, et C est la seule pièce d'entrée.
Pour chacune des six phrases suivantes, dire si elle est VRAIE, si elle est FAUSSE ou si ON NE PEUT PAS SAVOIR, et, dans chaque cas, expliquez votre réponse.
Phrase n°1 : « X est passé par P »
Phrase n°2 : « X est passé par N »
Phrase n°3 : « X est passé par M »
Phrase n°4 : « Si X est passé par O, alors X est passé par F »
Phrase n°5 : « Si X est passé par K, alors X est passé par L »
Phrase n°6 : « Si X est passé par L, alors X est passé par K »

II.1.2 Analyses et résultats

La résolution de la tâche peut se faire aisément avec des arguments empiriques. Dans cette situation, la phrase n°1 est nécessairement fausse ; en effet comme P n'a pas de porte, il est impossible que la personne X soit passé par P. Pour la phrase n°2, elle est nécessairement vraie car on ne peut pas sortir sans passer par cette porte, ce que l'on peut contrôler soit en remontant à partir de la sortie, soit en listant tous les trajets possibles. Pour la phrase n°3, la réponse est « on ne peut pas savoir » puisqu'en effet on peut passer par M pour sortir, mais on peut également sortir sans passer par M. La phrase n°4 est vrai, en effet O possède exactement deux portes, dont l'une communique avec F (rappelons que l'on ne peut pas passer deux fois par la même porte) ; la phrase n°5 est vraie pour une raison similaire. Concernant la phrase n°6, comme la pièce L a trois portes, il pourrait y avoir des chemins permettant de sortir en empruntant L et K, mais également de tels chemins empruntant L sans emprunter K, ce que l'on vérifie aisément. Par conséquent, pour cette phrase, comme pour la phrase n°3, un raisonnement empirique conduit à répondre « on ne peut pas savoir ». Cependant, la réponse attendue par les professeurs est que cette phrase numéro 6 est fausse. Or, la majorité des élèves répondent « on ne peut pas savoir », et, ce qui étonne les professeurs, c'est que ce sont surtout les bons élèves qui proposent cette réponse. Seuls 29% des élèves déclarent que cette phrase est fausse. Pour les professeurs, la phrase est fausse car ils considèrent qu'il s'agit d'un énoncé général comme le montre cette citation : *"S'agit-il d'énoncés mathématiques, qu'il s'agirait d'appréhender de façon globale? Dans ce cas, ce qui importe c'est la qualité d'un lien entre les deux assertions et non la véracité particulière de chacune des assertions."*. Les réponses des élèves montrent qu'ils raisonnent correctement de manière empirique ; ceci se retrouve également avec des étudiants plus avancés mais de façon moins nette. Cette situation du labyrinthe a été reprise par Rogalski & Rogalski (2003) dans le cadre d'une recherche concernant les modes de raisonnement des étudiants préparant le CAPES. Ils nous ont communiqué les résultats concernant cet item. Dans leur échantillon, qui comprend 178 étudiants sur deux années, 94 ont donné comme réponse « on ne peut pas savoir » pour la question 6, soit un peu plus de 52%, ce qui corrobore ce que nous avons observé dans nos formations : les étudiants et les professeurs stagiaires sont plus enclins à donner la réponse « on ne peut pas savoir », que les enseignants chevronnés. Néanmoins, y compris dans les stages de formation continue d'enseignants du second degré ou dans la formation des moniteurs du CIES (Centre d'Initiation à l'Enseignement Supérieur), cette situation laisse toujours émerger un désaccord sur la valeur de vérité de la phrase n°6. Ceci n'est évidemment pas pour nous étonner puisqu'en effet, les arguments empiriques conduisent tout naturellement à cette réponse. Ce que nous avons également montré, c'est que la formalisation dans le calcul des prédicats conduit également à répondre « on ne peut pas savoir ». En effet, dans cette situation, il est cohérent de considérer que la phrase n°6 est un cas de implication ouverte « si un trajet *t* passe par la porte L, alors ce trajet passe par la porte K » (il est assez clair dans cette situation que la variable pertinente est la variable trajet). Ceci est peut-être rendu plus clair si on remplace « une personne que nous appellerons X » par « une personne que nous appellerons *Pierre* ». Comme cette implication a, parmi les trajets qui permettent de sortir, au moins un exemple (un trajet qui passe par L et par K) et un contre exemple (un trajet qui passe par L et qui ne passe par K), on ne peut pas savoir quelle est la valeur de vérité de ce cas particulier de l'implication ouverte, sans information supplémentaire. Cette interprétation de la lettre X comme désignant un individu singulier, et non pas une variable dans le champ d'un quantificateur universel, conduit également à répondre « on ne peut pas savoir » pour la phrase n°3, ce qui est bien la réponse attendue par ceux qui ont proposé cette situation dans le cadre d'EVAPM2. Une analyse logique complète montre que trois interprétation de X sont possibles : (a) X est un nom d'individu singulier, ce que nous venons de proposer ; (b) X est un nom générique d'individu ; on raisonne alors sur les trajets génériques, et les réponses sont les mêmes que précédemment ; (c) X est une lettre de variable dans le champ d'un quantificateur universel : dans ce cas, il faudrait répondre que les phrases 3 et 6 sont fausses. Il est tout à fait exceptionnel que la réponse « la phrase n° 3 est fausse » apparaisse spontanément, mais elle est parfois proposée après débat sur la phrase n°6 pour des raisons de cohérence.

II.1.3 Commentaires

L'analyse dans le calcul de prédicats montre qu'aucune interprétation logique de la lettre X ne permet de répondre de manière cohérente à la fois : « on ne peut pas savoir » pour la phrase n°3, et « la phrase n°6 est fausse ». Cette réponse s'explique par la pratique de la quantification implicite des énoncés conditionnels dans la classe de mathématiques, qui conduit à interpréter tout énoncé conditionnel comme un énoncé général. Ce que montrent les différents résultats, c'est que cet implicite n'est pas partagé par des nombreux élèves et étudiants, et que d'autre part, dans certains cas, ceci peut-être non pertinent. Un problème bien connu des enseignants peut être mis en relation avec cet exemple ; il s'agit de la difficulté pour les élèves et les étudiants à considérer que la réciproque d'un théorème puisse être un énoncé faux, et ce précisément parce que la phrase ouverte correspondante a le plus souvent de nombreux exemples. En effet, seule l'explicitation, sous une forme ou sous une autre, de la quantification et du domaine d'objets sur lequel porte cette quantification permet de conclure à la fausseté d'un énoncé universel lorsque la phrase ouverte associée a à la fois un (ou des) contre-exemples et des exemples. La situation du labyrinthe est donc particulièrement révélatrice d'un « divorce » entre une pratique généralisée et considérée par de nombreux enseignants comme constitutive *du jeu mathématique* et une posture majoritaire chez les élèves et très bien représentée chez les étudiants, mêmes avancés, consistant à examiner les données empiriques et à assumer que dans certains cas, l'on a pas assez d'éléments pour se prononcer sur la valeur de vérité. Cette situation illustre en outre le fait, souligné par Gardies (1994), que la logique classique est moins éloignée de la logique de sens commun qu'on ne le pense habituellement, sous réserve de prendre comme théorie logique de référence le calcul des prédicats et non pas le calcul des propositions.

II.2 La quantification bornée

Nous parlons de *quantification bornée* pour décrire une *pratique ordinaire* du mathématicien lorsqu'il veut donner une définition en langage formalisé. Nous pouvons reprendre l'exemple classique de la définition de la continuité en un point a d'une fonction numérique f :

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\eta>0\ \forall x\ (|x - a| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon).$$

Dans la syntaxe du calcul des prédicats, il n'y a pas de quantification bornée ; si on a besoin de spécifier certains objets, on introduit des lettres de propriétés permettant de catégoriser les différents objets. Ici, naturellement, il s'agit de la propriété « être supérieur strictement à 0 » ; et si nous voulons faire disparaître la quantification bornée, il faudra introduire une implication pour le quantificateur universel et une conjonction pour le quantificateur existentiel, ce qui donne l'énoncé :

$$\forall\varepsilon\ [\varepsilon>0 \Rightarrow (\exists\eta\ (\eta>0 \wedge \forall x\ (|x - a| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon))].$$

Notons que l'on peut faire disparaître toutes les implications de cet énoncé en bornant également la quantification sur la variable x de la manière suivante :

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\eta>0\ \forall x \in]a-\eta\ ,\ a+\eta[\ (|f(x) - f(a)| < \varepsilon))$$

ce qui nous rapproche de la définition par les intervalles dont la structure logique est très élémentaire. Chellougui (2004) a montré que ce jeu de l'apparition/disparition de l'implication est bien présent dans les manuels de premier cycle universitaire français, le plus souvent sans qu'il ne soit explicité. Nous considérons que ce phénomène est constitutif de la compréhension de l'implication logique dans son utilisation en mathématiques, en particulier parce qu'il permet de comprendre pourquoi, comme ceci a été défendu avec force par Frege (1970), Russell (1989) ou Quine (1972), il est nécessaire pour définir la notion *d'implication universellement quantifiée* de considérer qu'une implication entre proposition est vraie lorsque son antécédent est faux, quoique cela puisse apparaître comme plus ou moins contraire au sens commun. Cependant, de nombreuses observations que nous avons conduites montrent que ceci n'est pas nécessairement disponible chez les étudiants.

Dans le cadre d'un enseignement optionnel proposé à des étudiants scientifiques de deuxième année universitaire, nous demandons régulièrement de formaliser l'énoncé qui fournit une condition suffisante pour que deux réels soient égaux :

« *si la distance de deux nombres réels peut être rendue inférieure à tout nombre strictement positif, alors ces deux nombres sont égaux.* ».

Après avoir stabilisé collectivement le fait que, dans l'ensemble R des nombres réels muni de ses propriétés de corps ordonné, l'énoncé ouvert

$$\text{« } (\forall\varepsilon>0\ d(x,y) < \varepsilon) \Rightarrow (x = y) \text{ »}$$

est bien la traduction de l'énoncé proposé en langue vernaculaire, et qu'il traduit bien le fait que la vérité de l'antécédent de l'implication pour un couple de réels donnés permet de déduire l'égalité de ces deux réels, nous demandons aux étudiants d'en donner une formalisation n'utilisant pas la quantification bornée. Les étudiants proposent alors régulièrement l'énoncé ci-dessous :

$$(\forall\varepsilon(\varepsilon>0 \wedge d(x,y) < \varepsilon)) \Rightarrow (x = y) \quad \text{(E)}$$

La question qui se pose alors est celle de savoir pourquoi cet énoncé ne convient pas. Comme la quantification bornée n'a pas d'équivalent dans la logique des prédicats, la syntaxe ne peut nous être d'aucun secours ; nous sommes donc « condamnés » à revenir au sens de l'expression que nous avons transformée, autrement dit à considérer son interprétation dans le modèle du corps ordonné des réels. Une caractéristique de cet énoncé, qui ne va pas de soi pour des débutants, c'est que la quantification universelle ne porte que sur l'antécédent de l'implication. Autrement dit, l'antécédent de l'implication s'interprète par la phrase ouverte :

« Pour tout ε, ε est positif et la distance de x et y est inférieure strictement à ε ». Or, quelles que soient les valeurs assignées aux variables x et y, la proposition obtenue est fausse puisqu'elle affirme que tout réel est positif strictement. Par suite, cet énoncé ne permet en aucun cas de déduire l'égalité d'un couple de réel donné. Cette écriture formelle ne s'interprète donc pas par la propriété voulue. Il est clair que la quantification bornée consiste à restreindre le domaine de quantification aux éléments possédant la propriété considérée. D'où il suit que, pour la supprimer, il faut faire le mouvement inverse et donc restituer l'implication. La formalisation correcte de l'énoncé est évidemment :

$$(\forall\varepsilon(\varepsilon > 0 \Rightarrow d(x,y) < \varepsilon)) \Rightarrow (x = y)$$

Notons enfin que la négation de cet énoncé est

$$(\exists\varepsilon(\varepsilon > 0 \wedge d(x,y) \geq \varepsilon)),$$

ce qui permet de retrouver le fait que supprimer la quantification bornée pour un énoncé existentiel conduit à introduire une conjonction.

Cet exemple permet de mettre en évidence plusieurs points cruciaux de l'articulation entre logique et raisonnement mathématique dans la perspective didactique qui est la nôtre. Le premier c'est que nous avons ici une illustration de la nécessité de considérer les implications à antécédent faux pour la pratique ordinaire des mathématiques. Le second, c'est que la pratique de la quantification bornée tend à occulter la structure logique profonde des énoncés que l'on manipule ; on peut faire l'hypothèse que, dans ce cas, une explicitation de cette structure logique contribue à la clarification conceptuelle dans la mesure où elle permet de travailler en même temps sur le concept logique d'implication et sur le concept mathématique d'égalité des nombres réels, concept particulièrement difficile à élaborer comme le montrent de nombreux travaux d'épistémologie et de didactique des mathématiques. Le troisième, c'est que, comme le dit Sinaceur (1991), le travail de formalisation se fait dans un mouvement de va et vient entre le modèle dans lequel on travaille, et le langage formalisé dans lequel on traduit les énoncés, ce qui permet d'exercer un contrôle sémantique sur les énoncés formalisés produits ; nous voyons ici à l'œuvre ce mouvement de va et vient.

II.3 L'absence de conclusion dans les démonstrations

La plupart des démonstrations proposées aux élèves de collège en France sont des démonstrations sous hypothèses, dans le sens suivant : on considère un (ou plusieurs) objet(s) géométrique(s) vérifiant un certain nombre de propriétés et on démontre qu'il(s) vérifie(nt) une (ou plusieurs) autres propriétés. Ainsi, partant d'une prémisse A (ou d'une conjonction de prémisses), on démontre une conclusion B. La question qui se pose alors est celle de savoir ce que l'on a démontré.

II.3.1 Un exemple au collège

Considérons l'exercice classique suivant.

Exercice 1 : Soit (A,B,C,D) un quadrilatère convexe, et I, J, K, L les milieux respectifs des segments [AB] ; [BC] ; [CD] ; [DA]. Quelle est la nature du quadrilatère (I,J,K,L)?

Réponse : c'est un parallélogramme, ce que l'on montre facilement en utilisant le théorème de Thalès.

Quel résultat de géométrie a-t-on démontré ? le quadrilatère (A,B,C, D) est-il un objet singulier de la géométrie pour lequel nous avons établi un résultat singulier, comme on prouve par exemple que le nombre π est transcendant ? Évidemment non ; il s'agit ici d'une preuve par élément générique et ce que nous avons démontré c'est le théorème de géométrie plane suivant :

Théorème : Quel que soit le quadrilatère convexe considéré, les milieux respectifs des côtés sont les sommets d'un parallélogramme.

Même au lycée, cette pratique reste répandue, alors qu'à l'université, la plupart des démonstrations visent au contraire à établir des théorèmes généraux, et ce dès le début de la première année d'université, ce qui contribue à rendre plus difficile la transition lycée/université. Ici encore, d'une certaine manière, on perd sur les deux tableaux puisque d'une part, on ne problématise pas la signification de l'implication, et d'autre part, on se prive de poser des questions mathématiques permettant d'approfondir les notions en jeu.

II.3.2 Un exemple dans un manuel pour étudiants en première année post bac

Nous allons montrer sur l'exemple ci-dessous que la pratique qui consiste à ne pas distinguer entre la preuve d'une proposition élémentaire et la preuve d'une implication tend à conforter l'idée encore communément répandue selon laquelle « du « Faux », on peut déduire n'importe quoi »,

Dans un manuel destiné aux étudiants scientifiques post-bac (Pichon ,1989) on, trouve l'affirmation suivant laquelle : « le faux entraîne n'importe quoi, ou bien du faux, on peut déduire n'importe quoi». (p.37). Pour illustrer son affirmation forte et « paradoxale», il propose aux lecteurs un jeu qui « *consiste à se donner une proposition A fausse et une proposition B quelconque, vraie ou fausse, même sans rapport apparent avec A, et à rechercher une démonstration (correcte) de B utilisant A, mais aucun autre résultat faux.* » (p.37). Il montre par exemple que partant de la proposition A = « 1 < 0 », on peut démontrer que « 1 = 0 », puis que « 5 divise 7 » etc. Il nous semble qu'il y a ici une confusion qui n'est pas sans rapport avec l'exemple précédent. En effet, ce que l'auteur démontre, ce n'est évidemment pas que « 1 = 0 » ; il démontre l'énoncé conditionnel « $(1 < 0) \Rightarrow (1 = 0)$ ». Comme l'antécédent de cet énoncé conditionnel est faux dans l'arithmétique des entiers, on ne peut faire aucune déduction. En effet, comme dit Frege :

> « Mais tant qu'on n'a pas reconnu la vérité d'une pensée, on ne peut pas l'employer comme prémisse d'une inférence, on ne peut rien en inférer ni conclure. Y prétendre, c'est confondre la reconnaissance de la vérité d'une composition hypothétique et une inférence où l'on prend la condition de la proposition composée comme prémisse » (Frege 1971, p. 228).

Ce qui est proposé dans ce manuel est à mettre en regard avec le choix, assumé par l'auteur, de ne pas faire de cours de logique et de ne donner « *que ce qui est vraiment utile, alors qu'une théorie de logique nécessiterait d'énoncer d'autres règles pour être complète* » (p.21). On peut cependant légitimement se demander si l'objectif d'utilité est atteint, compte tenu de ce que les choix faits ne contribuent pas, selon nous, loin s'en faut, à la clarification conceptuelle, dans la mesure où ils ne permettent pas de distinguer entre l'implication et l'inférence.

En conclusion, nous voudrions souligné le fait que, alors que le raisonnement hypothético-déductif est le paradigme du raisonnement mathématique, les exemples précédents laissent apercevoir que, lorsque cet aspect n'est pas assumé explicitement en tant que tel, le fait de ne pas conclure sur ce qui a été réellement démontré tend à obscurcir la notion de vérité dans une théorie donnée, en déclarant *vrais* des énoncés qui sont de fait *contingents*, c'est-à-dire *vrais sous* *certaines hypothèses*, *faux sous d'autres hypothèses*, ou encore *vrais de certains objets*, et *faux d'autres objets*, et ceci à l'intérieur d'une même théorie.

II.4 L'application de règles de raisonnement non valides

En mathématiques, la plupart des modes de raisonnements valides sont associés à des formules universellement valides du calcul des prédicats (c'est-à-dire vraies pour toute interprétation de ses lettres dans tout univers non vide), ce qui fonde la notion sémantique de conséquence logique. Nous présentons un exemple, tiré d'un manuel, de l'utilisation d'une règle d'inférence non valide au sens où, dans certaines interprétations, son utilisation peut conduire à un raisonnement incorrect, et un exemple de l'utilisation de cette même règle dans une démonstration erronée.

II.4.1 Une démonstration " elliptique "

La démonstration qui nous intéresse ici se trouve dans Houzel, 1996, p.27. Il s'agit de démonter la proposition suivante :

Soient f et g des fonctions numériques définies dans une partie A de R et a un élément adhérent à A ; si $f(t)$ et $g(t)$ ont des limites respectives h et k lorsque t tend vers a en restant dans A, alors $f(t)+ g(t)$ tend vers la limite $h + k$.

La démonstration proposée est la suivante :

" Par hypothèse, quel que soit $\varepsilon>0$, il existe $\eta>0$ tel que $t \in A$ et $|t-a| \leq \eta$ impliquent $|f(t) - h| \leq \varepsilon$ et $|g(t) - k| \leq \varepsilon$; on a alors $|f(t) + g(t) - (h + k)|$
$= |f(t) - h + g(t) - k| \leq |f(t) - h| + |g(t) - k| \leq 2\varepsilon$ "

Le raccourci qui est utilisé et donne lieu à la première affirmation peut s'interpréter comme l'application de la pseudo règle d'inférence suivante :"Pour tout x, il existe y, $F(x,y)$" *et* "Pour tout x, il existe y, $G(x,y)$", *donc* "Pour tout x, il existe y, $F(x,y)$ et $G(x,y)$". Or évidemment, cette règle n'est pas valide. Si l'utilisation d'un tel raccourci n'est pas un problème pour un mathématicien professionnel, il n'en va pas de même dans un manuel destiné à des étudiants. En effet si, dans le cas ci-dessus, la démonstration peut être complétée grâce aux propriétés de la relation d'ordre sur l'ensemble des nombres réels, son utilisation, sans aucun avertissement au lecteur, dans un manuel destiné à des étudiants débutants, pose naturellement des questions didactiques, et ce d'autant plus que les étudiants vont rencontrer à la même période des exemples où l'usage non contrôlé de cette règle conduira à un résultat faux, ou bien encore à un résultat juste mais avec une démonstration incorrecte, comme c'est le cas dans l'exemple ci-dessous.

II.4.2 Une démonstration erronée

Nous allons examiner maintenant une démonstration erronée d'un énoncé classique que l'on peut proposer en exercice en première année d'université scientifique. Il s'agit de démontrer, en utilisant le théorème des accroissements finis, le théorème des accroissements finis généralisés, appelé également théorème de Cauchy dans la littérature anglo-saxonne. Nous rappelons ci-dessous l'énoncé des deux théorèmes :

Théorème des accroissements finis **:**

Étant donné deux réels a et b tels que $a < b$ et une fonction numérique f définie sur l'intervalle fermé $[a ; b]$, si f est continue sur l'intervalle fermé $[a ; b]$, et dérivable sur l'intervalle ouvert $]a ; b[$, alors il existe un réel c dans l'intervalle $]a ; b[$ tel que $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$.

Théorème des accroissement finis généralisé **:**

Étant donné deux réels a et b tels que $a < b$ et deux fonctions numériques f et g définies et continues sur l'intervalle fermé $[a ; b]$, dérivables sur l'intervalle ouvert $]a ; b[$, si la dérivée g' de la fonction g ne s'annule pas sur l'intervalle $]a ; b[$, alors il existe un réel c dans l'intervalle $]a ; b[$, tel que :

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Une démonstration, fréquemment rencontrée chez les étudiants en DEUG scientifique première année, consiste à déduire le deuxième théorème du premier, de la façon suivante :

La fonction f vérifie les conditions d'application du théorème des accroissements finis, donc il existe c dans]a ; b[, tel que f'(c)(b - a) = f(b)-f(a). De même g vérifie les conditions d'application du théorème des accroissements finis, donc il existe c dans]a ; b[, tel que g'(c)(b - a) = g(b)-g(a). Comme g' ne s'annule pas sur]a ; b[, g'(c) ≠ 0 et donc g(b) - g(a) ≠ 0. On peut donc faire le quotient des deux égalités, on obtient alors l'égalité cherchée.

Ici, naturellement, le mode de raisonnement n'est pas acceptable, car on ne peut pas nécessairement construire un *élément commun* pour les deux fonctions. On peut se demander comment un étudiant débutant, donc non expert du domaine, peut élaborer, à travers les pratiques ordinaires des mathématiciens experts que sont ses enseignants, les outils qui lui permettront d'exercer les contrôles sémantiques nécessaires pour savoir quand on peut utiliser en toute sécurité une règle de raisonnement. En effet, ce sont les connaissances mathématiques du sujet sur le domaine qui vont déterminer le niveau de rigueur mobilisé par les experts, or précisément, pour un débutant, ces connaissances mathématiques sont en cours d'élaboration, si bien que l'on se trouve en face d'une sorte de cercle vicieux.

III QUELQUES PISTES POUR LA FORMATION DES ENSEIGNANTS

Depuis de nombreuses années, en lien avec ces travaux de recherche, des modules de formation ont été proposés en formation continue pour les professeurs du second degré, pour les moniteurs du CIES, et en 2002-2003 pour les étudiants préparant le CAPES de mathématiques dans le cadre de l'IUFM de Lyon. Nous présentons brièvement les deux derniers.

III.1 Un module pour les étudiants préparant le CAPES

Il s'agit d'un module facultatif proposé à tous les étudiants inscrits à l'IUFM de Lyon auxquels se sont inscrits envron la moitié des étudiants. L'objectif principal était de travailler sur l'articulation entre la logique et le raisonnement mathématique dans la perspective d'une part d'une meilleure compréhension des démonstrations mathématiques étudiées et d'autre part d'un meilleur contrôle sur les raisonnements produits, ceci en particulier lorsque sont en jeu des énoncés complexes comportant des quantifications multiples conjuguées aux connecteurs logiques classiques (négation, implication, disjonction, conjonction) dans une double perspective : d'une part améliorer les compétences personnelles en logique, d'autre part amorcer une réflexion didactique dans la perspective de l'enseignement sur les liens entre logique et raisonnement mathématique. Le module s'est déroulé au premier semestre. Les contenus suivant ont été traités : *la négation dans la langue et en mathématiques ; l'implication, une notion complexe et polysémique ; les modes classiques de raisonnement mathématiques (absurde, récurrence, disjonction des cas, exemples et contre-exemples etc..) ; les énoncés comportant des quantifications multiples* *(démonstrations en $\forall x \exists y$, notions de dépendance des variables, lien avec l'axiome du choix) ; la démonstration naturelle dans une théorie de la quantification et son utilité pour contrôler les démonstrations mathématiques ; du langage naturel aux énoncés formalisés et vice-versa.* Les éléments de logique nécessaires ont été introduits au fur et à mesure en particulier : *une présentation des deux systèmes logiques pertinents pour les mathématiques étudiées, calcul des propositions et calcul des prédicats ; les notions de vérité et de validité dans les langages formalisés.* Ces contenus logiques ont été travaillés en relation très étroite avec l'activité mathématique. Une partie importante du travail s'est déroulée sous la forme d'analyse de démonstrations, ou d'énoncés complexes, ou de résolution de problèmes, réalisés en petits groupes de trois ou quatre, avec confrontation des résultats et débat. Les questions et les propositions des participants ont fait l'objet d'un recueil explicite afin de pouvoir être prises en compte dans la dynamique du travail au sein du module d'une part, pour être exploité dans le cadre d'une recherche en cours d'autre part.

III.2 Une formation pour les moniteurs du CIES

L'objectif de cette formation, d'une durée de douze à quinze heures selon les années, est prioritairement de mettre en évidence les différentes notions recouvertes par le terme générique d'implication à travers des situations permettant de les mettre en débat d'une part, et de travailler sur les énoncés comportant des quantifications multiples afin de proposer des outils pour repérer, comprendre et traiter les difficultés des étudiants en particulier l'usage du symbolisme logique dans l'activté mathématique. La tâche du labyrinthe, résolue individuellement et donnant lieu à une mise en commun et à un débat, est utilisée pour amorcer le travail de réflexion sur le carctère polysémique et problématique de l'implication (Durand-Guerrier, 2003), sur l'importance du statut logique des lettres dans les énoncés, sur les effets didactiques potentiels d'une pratique systématique de quantification implicite des énoncés conditionnels, sur les distinctions entre proposition et propriété, ; terme général et terme singulier ; variable libre et variable liée etc.. C'est l'occasion également d'introduire la notion de phrase ouverte (énoncé contenant au moins uen variable libre) et son importance dans l'activité mathématique, de revenir sur la notion de contre-exemple en lien avec les énoncés généralisés. Le reste de travail se déroule en alternance de travail de groupe et de mise en commun avec débat. Il est consacré essentiellement au réinvestissement de ce premier travail pour l'analyse logique de textes mathématiques avec comme objectif de repérer la structure logique, les implicites, les erreurs éventuelles, le niveau de rigueur et de se prononcer éventuellement sur la validité. Ces textes sont de nature variée selon les activtés proposées. Il peut s'agir (a) de textes proposés par les particpants en réponse à une consigne du type : élaborer collectivement pour vos étudiants un corrigé pour un problème donné ; (b) de textes de manuels étudiés dans la perspective d'examiner les difficultés qu'ils pourraient soulever pour des apprenants, principalement en étudiant les éléments qui permettent ou non pour le lecteur débutant un contrôle de la validité ; (c) des textes produits par des étudiants et comportant des erreurs, avec pour consigne de repérer la nature des erreurs (mathématique, logique, articulation entre logique et mathématique), de commenter le texte à destination de l'auteur et de proposer un corrigé. Ce travail permet de proposer des pistes pour d'une part augmenter sa vigilance concernant sa propre façon de faire des mathématiques en situation d'enseignement, et d'autre part pour proposer aux étudiants des situations pertinentes articulant connaissances mathématiques et compétences logiques. Le travail collectif en petit groupe permet en outre de travailler en profondeur sur les questions de rigueur ; la variabilité des exigences selon les enseignants et selon les catégories d'étudiants apparaissant toujours de manière forte.

V CONCLUSION

Nous avons choisi dans cette communication d'aborder la question des pratiques enseignantes par les questions de logique. Nous avons montré que l'on peut repérer un certain nombre de *pratiques ordinaires* des enseignants de mathématiques susceptibles de générer ou de renforcer des difficultés pour les étudiants débutants. Un enjeu des formations que nous proposons est de développer des compétences professionnelles permettant de repérer dans le cours de l'enseignement les moments et les situations appropriés pour travailler simultanément sur les aspects logiques et mathématiques des concepts en jeu. Ceci suppose en particulier une prise de distance critique par rapport à sa propre pratique qui permet de reconnaître que certaines questions des étudiants mettent le doigt sur des difficultés inaperçues renvoyant à des questions de logique et méritant d'être prises en compte.

REFERENCES

[1] A.P.M.E.P. *Publication n°88 : EVAPM91/2. Evaluation des programmes de mathématiques Seconde 1991,* (1992)

[2] F. CHELLOUGUI, "L'utilisation des quantificateurs universels et existentiels en première année universitaire. Entre l'implicite et l'explicite", Thèse en cotutelle, Universités Lyon 1 &Tunis, IREM de Lyon, (2004).

[3] F. DEHAME, & D. CLENET, "*Algèbre générale.*", Vuibert, (1995).

[4] V. DURAND-GUERRIER, "L'élève, le professeur et le labyrinthe", Petit X, Vol 50, p.57-79, (1999).

[5] V. DURAND-GUERRIER, "Which notion of implication is the right one? From logical considerations to a didactic perspective", Educational Studies in Mathematics, Vol. 53, p. 5-34, (2003).

[6] V. DURAND-GUERRIER & G. ARSAC, "Méthodes de raisonnement et leurs modélisations logiques. Le cas de l'analyse. Quelles implications didactiques", Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol. 23, No 3, p. 295-342 (2003).

[7] G. FREGE, "Ecrits logiques et philosophiques", Editions du Seuil, (1970)

[8] J.L. GARDIES "Les fondements sémantiques du discours naturel", Vrin : Paris, (1994).

[9] C. HOUZEL, *"Analyse mathématique. Cours et exercices",* Paris : Belin, (1996).

[10] J. PICHON , "Théorie des ensembles, logique, les entiers. Cours et conseils de travail, exercices et problèmes corrigés"., Ellipses, (1989).

[11] W.V.O. QUINE, "Méthodes de logique", Armand Colin, (1972).

[12] ROGALSKI, J. & ROGALSKI, M. (2004a) Contribution à l'étude des modes de traitement de la validité de l'implication par de futurs enseignants de mathématiques, in *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives Vol.9,* Actes du colloque Argentoratum de juillet 2002, 175-203.

[13] RUSSELL, "Ecrits de logique philosophique", PUF: Paris, (1989).

[12] H, SINACEUR, "*Corps et Modèles",* Paris : Vrin, (1991)