Université Claude Bernard–Lyon I
CAPES de Mathématiques : Analyse
Année 2004–2005

Capes blanc
3 février 2005

Partie I – Etude d'une courbe plane

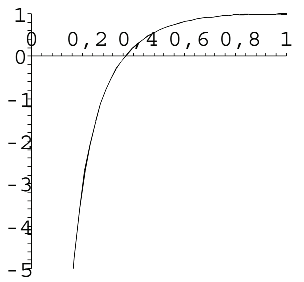
I.A Pour $z = \rho e^{i\theta}$, on a : (2 pt.)

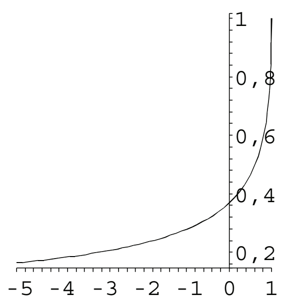
$$\xi = ze^{-z} = \rho\, e^{i\theta}\, e^{-\rho\cos\theta - i\rho\sin\theta} \quad ; \qquad \boxed{\xi = \rho\, e^{-\rho\cos\theta}\, e^{i(\theta-\rho\sin\theta)}.}$$

I.B La fonction u est bien définie sur $]0,1]$, elle y est dérivable par les théorèmes généraux et on a : (3 pt.)

$$\forall t \in\,]0,1]\,, \quad u'(t) = \frac{1}{t^2} - \frac{1+\ln t}{t^2} = -\frac{\ln t}{t^2}.$$

Comme u' est strictement positive sur $]0,1[$, u est strictement croissante sur $]0,1]$. Comme elle y est de plus continue, u réalise par une bijection de $]0,1]$ sur l'intervalle $]\lim_{t\to 0^+} u(t), u(1)] =]-\infty, 1]$.
On notera $u^{-1} :]-\infty,1] \to]0,1]$ la bijection réciproque de u : on sait qu'elle est continue. Les graphes suivants n'étaient pas demandés, mais ils auraient pu éviter à certains de penser que u^{-1} est dérivable en 1.





I.C Soit $r \in\,]0,1]$. Alors, on a, par bijectivité du logarithme : (3 pt.)

$$r\, e^{-r\cos\theta} = \frac{1}{e} \iff \ln r - r\cos\theta = -1 \iff \cos\theta = \frac{1+\ln r}{r} \iff u(r) = \cos\theta.$$

Or, si $\theta \in \mathbb{R}$, $\cos\theta \in\,]-\infty,1]$, donc $\cos\theta$ a un unique antécédent par u, qui appartient à $]0,1]$.
$\boxed{\text{D'où l'existence d'un unique } r(\theta) \in\,]0,1] \text{ tel que } r(\theta)\, e^{-r(\theta)\cos\theta} = e^{-1} \,:\, r(\theta) = u^{-1}(\cos\theta).}$

Remarque *Même si on n'arrive pas à faire apparaître la fonction u, il* faut *pouvoir s'en sortir autrement, par exemple en étudiant la fonction $h :]0,1] \to \mathbb{R}$, $r \mapsto re^{-ar}$ pour $a \in [-1,1]$ fixé.*

I.D Le réel $r(0)$ est solution de $r\, e^{-r} = e^{-1}$. La solution $r = 1$ saute aux yeux, et on sait qu'elle est unique : $\boxed{r(0) = 1.}$ (1 pt.)
Quant à $r(\pi/2)$, c'est la solution de $r = e^{-1}$... On a : $\boxed{r(\pi/2) = e^{-1}.}$ (1 pt.)
Enfin, pour $r(\pi)$, on tape `solve(r*exp(r)=exp(-1),r)` sur sa calculette et on invoque une dichotomie ou la méthode de Newton. On trouve : $\boxed{r(\pi) \simeq 0{,}278\,464 \text{ à } 10^{-6} \text{ près par défaut.}}$ (3 pt.)

I.E La fonction r est la composée de cos et de la réciproque de u, laquelle est continue par un théorème classique. Comme cos est 2π-périodique et paire, r l'est également. (2 pt.)

Quant à la dérivée, on remarque que la dérivée de u n'est jamais nulle sur $]0,1[$, et elle y est continue, donc u^{-1} est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty,1[$. Or, la fonction cos envoie $]0,2\pi[$ dans $]0,1[$, donc la composée $\boxed{r = u^{-1}\circ\cos \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur }]0,2\pi[.}$

La relation sur la dérivée de r s'obtient en dérivant la fonction constante $\theta \mapsto r(\theta)e^{-r(\theta)\cos\theta}$: (2 pt.)

$$\forall \theta \in \,]0,2\pi[\,,\quad r'(\theta)e^{-r(\theta)\cos\theta} + r(\theta)\left(-r'(\theta)\cos\theta + r(\theta)\sin\theta\right)e^{-r(\theta)\cos\theta} = 0,$$

d'où $r'(\theta)(r(\theta)\cos\theta - 1) = r(\theta)^2\sin\theta \neq 0$. Comme $r(\theta) \leq 1$ et $r(\pi) < 1$, on peut diviser par $(1 - r(\theta)\cos\theta)$ pour conclure. On peut aussi trouver cette relation en dérivant $u^{-1}\circ\cos$.

I.F

(a) Lorsque $h \to 0^+$, on a : (2 pt.)

$$v(h) = 1 - u(1-h) = 1 - \frac{1+\ln(1-h)}{1-h} = \frac{-h-\ln(1-h)}{1-h} = \frac{-h-\left(-h-\frac{h^2}{2}+o(h^2)\right)}{1+o(1)},$$

d'où $\boxed{v(h) \sim h^2/2.}$

(b) On a : $u(r(\theta)) = \cos\theta$, d'où : (3 pt.)

$$1 - u(r(\theta)) = 1 - \cos\theta = \theta^2/2 + o(\theta^2).$$

Or, on sait que r est continue en 0, et est à valeurs dans $]0,1]$, donc $r(\theta)$ tend vers 1 par valeur inférieures lorsque θ tend vers 0. En posant $h(\theta) = 1 - r(\theta)$, on a donc : $\lim_{\theta\to 0} h(\theta) = 0^+$. Mais alors, d'après la question précédente, on a :

$$(1 - u(r(\theta)) \sim (1 - u(1 - h(\theta))) \sim \frac{h(\theta)^2}{2}.$$

En identifiant ces deux équivalents de $1 - u(r(\theta))$, on a : $h(\theta)^2 \sim \theta^2$ au voisinage de 0. En d'autres termes, il existe une fonction ε telle que

$$h(\theta)^2 = \theta^2\,(1+\varepsilon(\theta)) \quad \text{et} \quad \lim_{\theta\to 0}\varepsilon(\theta) = 0.$$

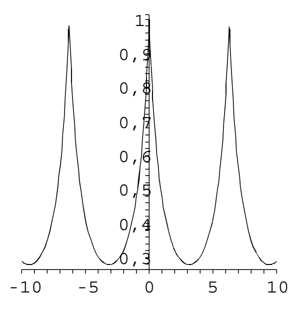
Supposons désormais que $\theta > 0$; comme $h(\theta) > 0$ pour tout θ, on a : $h(\theta) = \theta\sqrt{1+\varepsilon(\theta)}$, d'où : $h(\theta) = \theta + o(\theta)$ au voisinage de 0^+ (continuité de la racine carrée en 1).

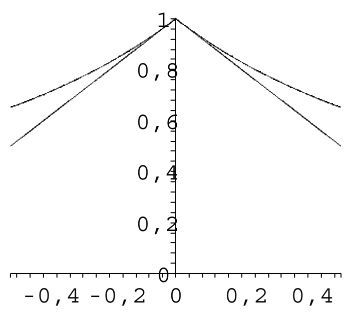
Enfin : $\boxed{r(\theta) = 1 - \theta + o(\theta) \text{ lorsque } \theta \text{ tend vers } 0^+.}$

De même avec $\theta < 0$, ou par parité de r, on tire : $\boxed{r(\theta) = 1 + \theta + o(\theta) \text{ lorsque } \theta \text{ tend vers } 0^-.}$

(c) La dérivabilité de r à gauche et à droite en 0 en résulte. (1 pt.)

(d) Les variations de r sur $\mathbb{R}$ se déduisent de l'étude sur $[0,\pi]$. Sur cet intervalle, r est (strictement) croissante comme composée d'une fonction strictement décroissante et d'une fonction croissante. Voici un graphe et un zoom sur repère orthonormé pour détailler le point anguleux. (2 pt.)





I.G

(a) Puisque r est 2π-périodique et jamais nulle, Γ est une courbe simple : chaque demi-droite d'origine l'origine du repère contient exactement un point de Γ. (2 pt.)
Puisque r est paire, $\boxed{\text{la courbe } \Gamma \text{ est symétrique par rapport à l'axe des abscisses.}}$

En effet, cette symétrie σ envoie le point (de coordonnées polaires) (ρ, θ) sur le point (de coordonnées) $(\rho, -\theta)$. Un point (ρ, θ) appartient à Γ SSI $\rho = r(\theta)$, donc σ envoie Γ dans Γ, puis $\sigma(\Gamma) = \Gamma$ par involutivité.

(b) On peut considérer Γ comme (l'image de) la courbe paramétrée (3 pt.)

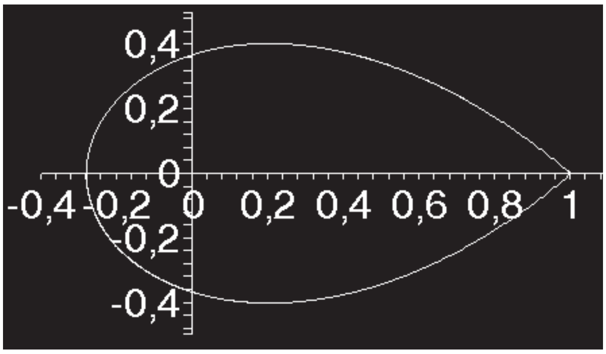
$$\theta \mapsto (x(\theta), y(\theta)) = (r(\theta)\cos\theta, r(\theta)\sin\theta).$$

Pour θ tendant vers 0 par valeurs supérieures, par exemple, on a :

$$\begin{pmatrix} x(\theta) \\ y(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(\theta)\cos\theta \\ r(\theta)\sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-\theta+o(\theta))(1+o(\theta)) \\ (1+o(1))(\theta+o(\theta)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\theta+o(\theta) \\ \theta+o(\theta) \end{pmatrix},$$

donc cette branche de la courbe possède une demi-tangente en $\theta = 0$, portée par le vecteur de coordonnées $(-1, 1)$.

(c) Pour tracer la courbe, on étudie les variations de r sur une période, d'après les variations connues de u et cos : r décroît sur $[0, \pi]$, de la valeur 1 en 0 à la valeur $r(\pi)$ en π en passant par e^{-1} en $\pi/2$; r atteint un minimum en π, d'où une tangente verticale au point de Γ correspondant à $\theta = \pi$; on complète par symétrie par rapport à l'axe des abscisses. (3 pt.)
Tracé électronique de Γ :



(d) D'après la première question, si $z = r(\theta)e^{i\theta}$, on a : $ze^{-z} = e^{-1}\, e^{i(\theta - r(\theta)\sin\theta)}$. Par suite, $|ze^{-z}| = e^{-1}$, donc l'image de Γ est contenue dans le cercle de centre l'origine et de rayon e^{-1}. On prend pour argument de ze^{-z} : $\phi(\theta) = \theta - r(\theta)\sin\theta$. On remarque que $|\phi(\theta) - \theta| \leq 1$ pour $\theta \in \mathbb{R}$, donc $\phi(2\pi + 1) \geq 2\pi$ et $\phi(-1) \geq 0$. La continuité de ϕ et le théorème des valeurs intermédiaires assurent l'existence, pour tout $\alpha \in [0, 2\pi]$, d'un réel $\theta \in [-1, 2\pi + 1]$ tel que $\phi(\theta) = \alpha$. On a alors : $r(\theta)e^{i\theta} = e^{-1}e^{i\alpha}$. (3 pt.)
Ainsi, $\boxed{\text{l'image de } \Gamma \text{ par l'application } z \mapsto ze^{-z} \text{ est tout le cercle de centre 0 et de rayon } e^{-1}.}$

Partie II – Etude des modules des racines

II.A

(a) La dérivée de P_n est P_{n-1}. Si z était un zéro multiple de P_n, alors ce serait un zéro de P_{n-1}, donc de $P_n - P_{n-1} = X^n/n!$, donc $z = 0$. C'est impossible. (2 pt.)
(b) L'application $z \mapsto z/n$ est injective, les $\lambda_{n,k}$ sont distincts, donc les $z_{n,k}$ aussi. (1 pt.)

II.B On a : (2 pt.)

$$Q_n(X) = \frac{n!}{n^n}\, X^n\, P_n\left(\frac{n}{X}\right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{n^{n-k}k!} X^{n-k} = \sum_{p=0}^{n} \frac{n!}{n^p(n-p)!} X^p = \sum_{p=0}^{n} q_{n,p} X^p.$$

On constate que 0 n'est pas une racine de Q_n. Or, pour $z \in \mathbb{C}^*$, on a : $Q_n(z) = 0$ si et seulement si $\Pi_n(1/z) = 0$, si et seulement si $1/z$ est l'un des $z_{n,k}$, dont aucun n'est nul. Ainsi, $\boxed{\text{les racines de } Q_n \text{ sont les } 1/z_{n,k}.}$

II.C

II.C.1. Ici, $r < 1$.

(a) Pour $|z| \leq r < 1$, on peut développer $(1-z)^{-1}$ en série entière. Les séries $\sum z^p$ et $\sum_p q_{n,p} z^p$ convergent absolument, ce qui permet d'écrire : (2 pt.)

$$\left|\frac{1}{1-z} - Q_n(z)\right| = \left|\sum_{p=0}^{+\infty} z^p - \sum_{p=0}^{+\infty} q_{n,p} z^p\right| \leq \sum_{p=0}^{+\infty} |1 - q_{n,p}|\; |z|^p \leq \sum_{p=0}^{+\infty} (1 - q_{n,p})\; r^p.$$

La dernière inégalité est se justifie par le fait que les $q_{n,p}$ sont des produits de réels compris entre 0 et 1, donc ils sont dans $[0, 1]$.

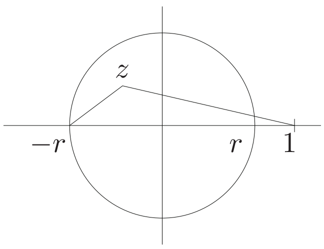
On remarque qu'il y a égalité partout lorsque $z = r$ (mais pas si on impose seulement $|z| = r$...). (1 pt.)

(b) On veut appliquer le théorème du préambule. Puisque $q_{n,p} \in [0, 1]$, il vient : $|(1-q_{n,p})r^p| \leq r^p$, et $\sum r^p$ converge. De plus, pour p fixé, $q_{n,p}$ est le produit d'un nombre fini de suites qui tendent vers 1 si n tend vers l'infini, donc, pour tout p fixé, $\lim_{n\to+\infty}(1 - q_{n,p})r^p = 0$. D'après le préambule, on a donc : (3 pt.)

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{p=0}^{+\infty} (1 - q_{n,p})\; r^p = \sum_{p=0}^{+\infty} \lim_{n\to+\infty} (1 - q_{n,p})\; r^p = 0, \quad \text{donc} \quad \lim_{n\to+\infty} \sup_{|z|\leq r} \left|\frac{1}{1-z} - Q_n(z)\right| = 0.$$

II.C.2.

(a)



$$|z| \leq r \Rightarrow |1 - z| \leq 1 + r \Rightarrow \frac{1}{|1-z|} \geq \frac{1}{1+r}$$

D'après la question précédente, il existe un entier N tel que pour $n \geq N$, (3 pt.)

$$\sum_{p=0}^{+\infty} (1 - q_{n,p}) r^p \leq \frac{1}{2}\, \frac{1}{1+r}.$$

Supposons que pour un certain $n \geq N$, Q_n ait une racine z de module $|z| \leq r$. Alors, on a d'une part :

$$\left|\frac{1}{1-z} - Q_n(z)\right| \leq \sum_{p=0}^{+\infty} (1 - q_{n,p})\; r^p \leq \frac{1}{2}\, \frac{1}{1+r},$$

et d'autre part :

$$\left|\frac{1}{1-z} - Q_n(z)\right| = \left|\frac{1}{1-z}\right| \geq \frac{1}{1+r}.$$

C'est insoutenable, donc pour tout $n \geq N$, toute racine z de Q_n satisfait $|z| > r$.

(b) Soit $R > 1$. Il existe N tel que pour $n \geq N$, toute racine de Q_n ait un module strictement supérieur à $1/R$, i.e. : pour tout k, $|z_{n,k}^{-1}|\; R^{-1}$. Donc pout $n \geq N$, tous les $z_{n,k}$ ont un module strictement inférieur à R. (2 pt.)

II.D

II.D.1. Par continuité de $z \mapsto ze^{-z}$, $\lim_{p\to+\infty} z_p e^{-z_p} = ze^{-z}$. Or, si $\mathrm{Re}(z) = 1$ et $|z| \leq 1$, alors $z = 1$. (1 pt.)
D'où : $\lim_{p\to+\infty} z_p e^{-z_p} = e^{-1}$.

II.D.2. Ici, $\mathrm{Re}(z) < 1$.
(a) Par concavité du logarithme et croissance de l'exponentielle, on a, pour $p \geq p_0$ et $t \in [0, p[$: (2 pt.)

$$\left(1 - \frac{t}{p}\right)^p = e^{p\ln\left(1-\frac{t}{p}\right)} \leq e^{-t}.$$

D'autre part, puisque $\mathrm{Re}(z_p) \leq s$, il vient :

$$\left|e^{z_p t}\right| = e^{\mathrm{Re}(z_p)t} \leq e^{st}.$$

Le produit membre à membre de ces inégalité donne la réponse.
(b) On fixe un réel $T > 0$. On supposera toujours $p \geq T$.

Remarque *Ah ! si on avait le théorème de convergence dominée ! L'inégalité du* (a) *est une hypothèse de domination, ce qui permettrait d'inverser* $\lim_{p\to+\infty}$ *et* $\int_0^T$ *sans plus de fioritures !*

On montre que la suite $(u_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0, T]$ vers $t \mapsto e^{-t+zt}$. On écrit : (3 pt.)

$$\left|u_p(t) - e^{-t+zt}\right| = \left|e^{-t+zt}\right| \left|e^{(z_p-z)t+p\ln\left(1-\frac{t}{p}\right)+t} - 1\right| \leq e^{(1+s)T} \left|e^{(z_p-z)t+p\ln\left(1-\frac{t}{p}\right)+t} - 1\right|.$$

On commence par montrer que la suite de fonctions $(v_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$v_p(t) = (z_p - z)t + p\ln\left(1 - \frac{t}{p}\right) + t \quad (t \in [0, T])$$

converge uniformément vers 0 sur $[0, T]$.
D'abord, on a, pour $t \in [0, T]$ et $p \geq T$:

$$|(z_p - z)t| \leq T|z_p - z|.$$

D'autre part, la fonction $g : x \mapsto \ln(1 - x)$ est deux fois dérivable sur $[0, 1/2]$ et sa dérivée y est majorée par 4 (vérifier !). D'où, par la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2, pour $p \geq 2T$ et $t \in [0, T]$:

$$\left|p\ln\left(1 - \frac{t}{p}\right) + t\right| = p\left|g\left(\frac{t}{p}\right) - g(0) - \frac{t}{p}g'(0)\right| \leq p\left(\frac{t}{p}\right)^2 \sup_{[0,1/2]} |g''| \leq \frac{4T^2}{p},$$

Par somme, on voit que la suite $(v_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers 0 sur $[0, T]$. Puisque l'exponentielle est continue, on en déduit facilement que la suite $(e^{v_p})_{p\geq1}$ converge uniformément vers 1, puis que la suite $(u_p)_p$ converge uniformément vers ce qu'on croit. Par suite, on peut permuter $\lim_{p\to+\infty}$ et $\int_0^T$, ce qui permet de conclure :

$$\boxed{\lim_{p\to+\infty} \int_0^{+\infty} u_p(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{-t+zt}\,\mathrm{d}t.}$$

(c) Trop facile : (2 pt.)

$$\int_0^{+\infty} e^{-t+zt}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{e^{(-1+z)t}}{-1+z}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{1-z}.$$

(On a $\lim_{t\to+\infty} |e^{-t+zt}| = \lim_{t\to+\infty} e^{(\mathrm{Re}(z)-1)t} = 0$ car $\mathrm{Re}(z) < 1$.)

II.D.3. On suppose toujours que $\mathrm{Re}(z) < 1$.

(a) Soit k entier, $k \geq 2$. La fonction logarithme est croissante sur $[k-1,k]$ et $[k,k+1]$, donc : (3 pt.)

$$\int_{k-1}^{k} \ln t \,\mathrm{d}t \leq \ln k \leq \int_{k}^{k+1} \ln t \,\mathrm{d}t$$

On en déduit, pour $p \in \mathbb{N}^*$:

$$p \ln p - p + 1 = \int_1^p \ln t \,\mathrm{d}t \leq \sum_{k=1}^{p} \ln k \leq \int_2^{p+1} \ln t \,\mathrm{d}t = (p+1)\ln(p+1) - p + 1 - 2\ln 2,$$

puis (vérifier !)

$$-p + 1 \leq \sum_{k=1}^{p} \ln k - p \ln p \leq -p + O(\ln p),$$

et enfin, par division par $-(p+1)$, puis "passage" à la limite et à l'exponentielle :

$$\boxed{\lim_{p \to +\infty} \left(\frac{p^p}{p!}\right)^{\frac{1}{p+1}} = e.}$$

(b) Le module de l'intégrale de u_p tend vers une limite non nulle $|1-z|^{-1}$, donc (2 pt.)

$$\lim_{p \to +\infty} \left| \int_0^p \left(1 - \frac{t}{p}\right)^p e^{z_p t} \,\mathrm{d}t \right| = \frac{1}{|1-z|} \quad \text{donc} \quad \lim_{p \to +\infty} \left| \int_0^p \left(1 - \frac{t}{p}\right)^p e^{z_p t} \,\mathrm{d}t \right|^{\frac{1}{p+1}} = 1.$$

La limite cherchée est donc : $\boxed{e}$.

II.E Comportement asymptotique des $|\xi_{n,k}|$

II.E.1. Left to the reader. (Notice the polynomial part in the Taylor expansion, $\Pi_p(z)$, vanishes.) (2 pt.)

II.E.2. Pour $R > 1$, il existe N tel que pour $m \geq N$, les racines de Π_m aient un module inférieur à R. (2 pt.) Par suite, dès que $p_n \geq N$, le module de z_{p_n} est inférieur (ou égal) à R. A la limite, ça reste vrai, d'où : $|z| \leq R$, pour tout $R > 1$. D'où $\boxed{|z| \leq 1.}$

A présent, dans la formule (2), on prend les modules, puis on prend la racine $(p+1)$ème : (2 pt.) à gauche, ça tend vers 1. A droite, par continuité, le premier facteur tend vers $|ze^{-z}|$ et le deuxième tend vers e d'après II.D.3. D'où : $\boxed{|ze^{-z}| = e^{-1}.}$

II.E.3.

(a) On suppose que ce n'est pas le cas : il existe donc une constante $C > 0$ telle que : (2 pt.)

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad \exists n \geq N, \ \exists k \in \{1, \ldots, n\}, \qquad \left| |\xi_{n,k}| - \frac{1}{e} \right| \geq C.$$

On construit alors par récurrence les suites $(n_p)_p$ et $(k_p)_p$: on amorce avec $N = 0$ pour trouver (n_0, k_0). Si on a construit (n_p, k_p), on applique à $N = n_p + 1$ pour trouver (n_{p+1}, k_{p+1}).

(b) D'après II.C.2, en prenant par exemple $R = 12$, on voit que tous les $z_{n,k}$ sont dans le disque (2 pt.) de centre 0 et de rayon 12 pour $n \geq N$ convenable. Quant aux autres $z_{n,k}$ pour $n < N$, ils sont en nombre fini. Bref, la suite $(z_{n_p,k_p})_p$ est bornée. Quitte à la remplacer par une sous-suite, on peut donc supposer qu'elle converge. D'après II.E.2, sa limite, z, satisfait $|ze^{-z}| = e^{-1}$. Ce qui contredit l'hypothèse selon laquelle $\left| |\xi_{n_p,k_p}| - e^{-1} \right| \geq C$.

Partie III – Répartition des arguments

III.A

(a) La fonction f est bien définie en tout point où le dénominateur ne s'annule pas, i.e. pour $x \neq 1/z_{n,k}$ $(k = 1, \ldots, n)$. (Même si Q_n avait des racines multiples, f exploserait en ces points.) On reconnait en f la dérivée logarithmique de Q_n. On exprime donc Q_n comme un produit : (2 pt.)

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{z_{n,1}}, \ldots, \frac{1}{z_{n,n}} \right\}, \quad Q_n(X) = C \prod_{k=1}^{n} \left(x - \frac{1}{z_{n,k}} \right),$$

où C est une constante qu'on ne se donne pas la peine de préciser (en fait, $C = q_{n,n}$). On en tire :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{z_{n,1}}, \ldots, \frac{1}{z_{n,n}} \right\}, \quad f_n(x) = -\frac{Q_n'(x)}{Q_n(x)} = -\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x - \frac{1}{z_{n,k}}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{z_{n,k}}{1 - x z_{n,k}}.$$

(b) Soit V le voisinage de 0 défini par : $|x| < \min_{1 \leq k \leq n} |z_{n,k}^{-1}|$. Pour $x \in V$, l'inégalité $|x\, z_{n,k}| < 1$ autorise à développer le $k$ème terme en série entière : (2 pt.)

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} z_{n,k} \sum_{p=0}^{+\infty} (x z_{n,k})^p = \sum_{k=1}^{n} \sum_{p=0}^{+\infty} x^p z_{n,k}^{p+1} = \sum_{p=0}^{+\infty} \sum_{k=1}^{n} z_{n,k}^{p+1} x^p = \sum_{p=0}^{+\infty} s_{n,p+1}\, x^p.$$

(Pour intervertir les sommes, rien à dire, si ce n'est que l'une des deux est finie.)
Comme le module $|f(z)|$ tend vers l'infini lorsque z tend vers l'un des complexes $z_{n,k}^{-1}$, ceux-ci ne sauraient être dans le disque de convergence. Donc le rayon de convergence de la série entière ci-dessus est bien $\min_{1 \leq k \leq n} |z_{n,k}^{-1}|$.

III.B Majoration des $S_{n,p}$

III.B.1. On a, pour tout $x \in V$: $-Q_n'(x) = Q_n(x) f(x)$. Or, dans V, les séries définissant $f(x)$ et $Q_n(x)$ convergent absolument. Leur produit est donc développable en série entière, et on a $(x \in V)$: (2 pt.)

$$Q_n(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} q_{n,p}\, x^p, \;\; f(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} s_{n,p+1}\, x^p, \quad \text{donc} \quad f(x) Q_n(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \left(\sum_{i=0}^{p} q_{n,i} s_{n,p+1-i} \right) x^p.$$

D'autre part, on peut dériver terme à terme une série entière dans son disque ouvert de convergence (*a fortiori* quand il s'agit d'un polynôme !) :

$$\forall x \in V, \quad -Q_n'(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} -(p+1) q_{n,p+1}\, x^p.$$

Par unicité du développement en série entière sur un intervalle non trivial :

$$\forall n \geq 1, \; \forall p \geq 0, \quad -(p+1)\, q_{n,p+1} = \sum_{i=0}^{p} q_{n,i}\, s_{n,p+1-i}.$$

III.B.2.

(a) On reconnaît en $s_{n,1}$ la somme des racines du polynôme Π_n. C'est donc l'opposé du coefficient de X^{n-1} dans le polynôme unitaire proportionnel à Π_n, ou encore : (2 pt.)

$$s_{n,1} = -\frac{\frac{n^{n-1}}{(n-1)!}}{\frac{n^n}{n!}} = -1.$$

(b) (Rappelons que $n \in \mathbb{N}^*$ est fixé.) Pour $p = 1$, on a bien : $|s_{n,1}| \leq 1$. Supposons que pour un certain $p \geq 1$, on ait : $|s_{n,p}| \leq 3^p$. Alors, en vertu de la question précédente (et des inégalités largement utilisées $0 \leq q_{n,p} \leq 1$, $q_{n,0} = 1$) : (3 pt.)

$$\begin{aligned} s_{n,p+1} &= \frac{1}{q_{n,0}} \left(-(p+1) q_{n,p+1} - \sum_{i=1}^{p} q_{n,i} s_{n,p+1-i} \right) \\ |s_{n,p+1}| &\leq p + 1 + \sum_{i=1}^{p} 3^{p+1-i} = p + 1 + 3\,\frac{3^p - 1}{3 - 1}. \end{aligned}$$

Il suffit donc de démontrer que pour $p \geq 1$,

$$p + 1 + 3\,\frac{3^p - 1}{3 - 1} \leq 3^{p+1}, \quad \text{ou encore} \quad 2p - 1 \leq 3^{p+1},$$

ce qui résulte d'une récurrence facile.

Remarque *Ce 3^p semble un peu arbitraire. On veut simplement majorer la suite par une suite géométrique (pour (c) ci-dessous) et indépendante de n (pour III.C.1). Remarquer qu'avec 2^p, la preuve n'aurait pas marché (si simplement).*

(c) Idée *Comme la question est "en déduire", la seule information de l'énoncé à utiliser est la majoration de $|s_{n,p}|$. Pour cela, il s'agit d'exprimer $S_{n,k}$ en fonction de $s_{n,k}$. Pas question de commencer par majorer $|z_{n,k} e^{-z_{n,k}}|$ pour se débarrasser de l'exponentielle, car on ne sait rien de la somme des $|z_{n,k}^p|$. La seule chose raisonnable qu'il reste à faire, c'est de développer l'exponentielle $e^{-z_{n,k}}$.*

On a : (3 pt.)

$$S_{n,p} = \sum_{k=1}^{n} z_{n,k}^p e^{-p z_{n,k}} = \sum_{k=1}^{n} z_{n,k}^p \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{p^\ell z_{n,k}^\ell}{\ell!} = \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{p^\ell}{\ell!} \sum_{k=1}^{n} z_{n,k}^{p+\ell},$$

d'où :

$$|S_{n,p}| \leq \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{p^\ell}{\ell!}\, 3^{p+\ell} = 3^p\, e^{3p}.$$

III.C Equirépartition des $\phi_{n,k}$

III.C.1. Rappelons que p est fixé. On commence par écrire : (3 pt.)

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} e^{ip\phi_{n,k}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\xi_{n,k}^p}{|\xi_{n,k}|^p}.$$

Idée *Les dénominateurs sont presque tous égaux à e^{-p} d'après II.E.3, et la somme des numérateurs est majorée par une constante indépendante de n d'après la question précédente. On conçoit donc que cette somme puisse tendre vers 0.*

On écrit ainsi :

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\xi_{n,k}^p}{|\xi_{n,k}|^p} \right| &= \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\xi_{n,k}^p}{|\xi_{n,k}|^p} - \frac{\xi_{n,k}^p}{e^{-p}} \right) + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\xi_{n,k}^p}{e^{-p}} \right| \\ &\leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |\xi_{n,k}|^p \left| \frac{1}{|\xi_{n,k}|^p} - \frac{1}{e^{-p}} \right| + e^p \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \xi_{n,k}^p \right|. \end{aligned}$$

On va montrer que chaque terme tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

Fixons $\varepsilon > 0$. Par continuité de la fonction réelle $x \mapsto x^{-p}$ en e^{-1}, il existe $\alpha > 0$ tel que pour $|x - e^{-1}| \leq \alpha$, on ait : $|x^{-p} - e^p| \leq \varepsilon$. (On choisit α assez petit pour que x^-p soit bien défini dès que $|x - e^{-1}| \leq \alpha$, i.e. $\alpha < e^{-1}$.)
D'après II.E.3, il existe donc N entier tel que pour $n \geq N$, et $1 \leq k \leq n$, on ait $||\xi_{n,k}| - e^{-1}| \leq \alpha$. On a alors : $|\xi_{n,k}| \leq 2e^{-1}$ et surtout :

$$\left| \frac{1}{|\xi_{n,k}|^p} - e^p \right| \leq \varepsilon.$$

Mais alors, pour $n \geq N$, on a :

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\xi_{n,k}^p}{|\xi_{n,k}|^p} \right| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |\xi_{n,k}|^p \varepsilon + \frac{e^p |S_{n,p}|}{n} \leq \left(2e^{-1}\right)^p \varepsilon + \frac{3^p e^{4p}}{n}$$

Il existe un entier $M \geq N$ tel que pour $n \geq M$, on ait : $3^p e^{4p}/n \leq \varepsilon$. Vu que p est fixé, on a démontré :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} e^{ip\phi_{n,k}} = 0.}$$

III.C.2. Soit f continue, 2π-périodique, $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Fixons $\varepsilon > 0$. (3 pt.)
Comme f est limite uniforme de sa série de Fourier, il existe un polynôme trigonométrique P : $x \mapsto \sum_{p=0}^{q} a_p e^{ipx}$ ($a_0, \ldots, a_q$ constantes complexes) tel que pour tout x réel, $|f(x) - P(x)| \leq \varepsilon$.
Pour $n \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned}
\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(\phi_{n,k}) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\phi)\, \mathrm{d}\phi \right| &\leq \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(\phi_{n,k}) - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} P(\phi_{n,k}) \right| \\
&\quad + \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} P(\phi_{n,k}) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(\phi)\, \mathrm{d}\phi \right| \\
&\quad + \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(\phi)\, \mathrm{d}\phi - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\phi)\, \mathrm{d}\phi \right| \\
&\leq \varepsilon + \sum_{p=1}^{q} |a_p| \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} e^{ip\phi_{n,k}} \right| + \varepsilon.
\end{aligned}$$

(Noter et justifier le subtil passage de $\sum_{p=0}^{q}$ à $\sum_{p=1}^{q}$ dans la dernière ligne... C'est parce que $\int_{-\pi}^{\pi} P$ vaut a_0.) Comme, grâce à la question précédente, on peut rendre le terme central inférieur à ε pour n supérieur à un N convenable, on a prouvé :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(\phi_{n,k}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\phi)\, \mathrm{d}\phi.}$$

Partie IV – Etude des racines de partie réelle positive

Le lecteur intéressé se rapportera à la Revue de Mathématiques Spéciales idoine. Neuf points étaient réservés dans le barème pour cette partie non abordée.
Signalons simplement que l'égalité

$$\lim_{n \to +\infty} (\max_{1 \leq k \leq n} |r_{n,k} - r(\theta_{n,k})|) = 0.$$

s'interprète en disant que les zéros de Π_n, la troncature du développement de Taylor de l'exponentielle convenablement normalisée, s'accumulent autour de la courbe Γ de la partie I.