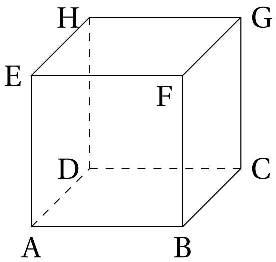
Deux boules, d'intersection vide, sont contenus dans un cube. On cherche positions et rayons pour que la somme des volumes soit maximale.

1 Le problème

L'espace est muni d'un repère orthonormal.



$ABCDEFGH$ est un cube de coté 1. $\mathscr{S}_1$ est une sphère centrée sur un point C_1 de la diagonale du cube $[AG]$, $\mathscr{S}_2$ est une sphère centrée sur un point C_2 de la diagonale du cube $[AG]$. Ces deux sphères sont telles que :

- $\mathscr{S}_1$ est tangente au plan (ABC),
- $\mathscr{S}_2$ est tangente au plan (BCG),
- $\mathscr{S}_1$ et $\mathscr{S}_2$ sont tangentes,
- $\mathscr{S}_1$ et $\mathscr{S}_2$ sont entièrement contenues dans le cube.

L'objectif est de déterminer la position des points C_1 et C_2 et les rayons r_1 et r_2 des sphères $\mathscr{S}_1$ et $\mathscr{S}_2$ de façon à ce que la somme des volumes des boules délimitées par $\mathscr{S}_1$ et $\mathscr{S}_2$ soit maximale.

2 Travail en géométrie dynamique

Construire la figure dans une feuille geospace. Toutes les contraintes devront être respectées. Faire une conjecture sur la solution du problème.

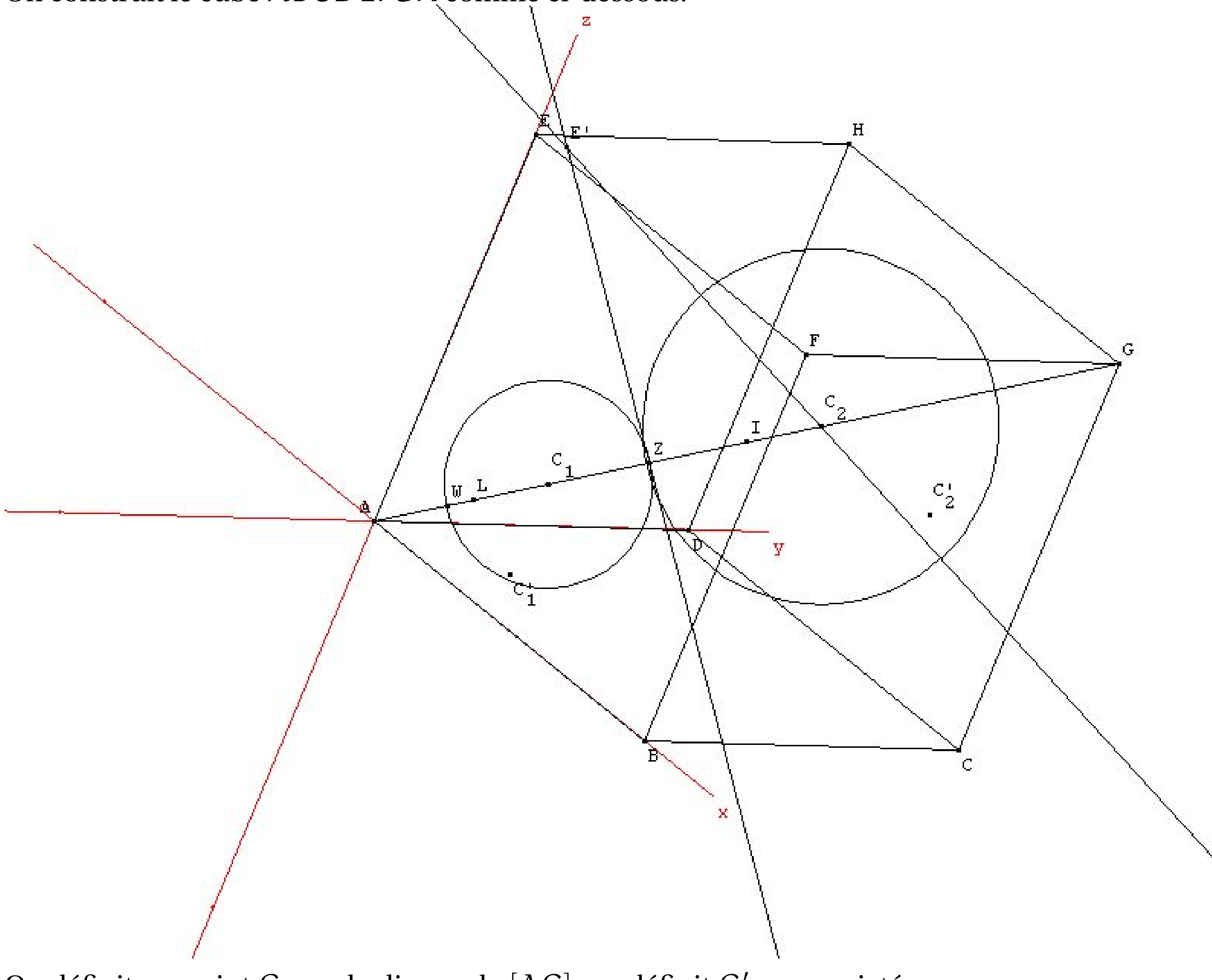
3 Démontrer

Éléments de réponse

On donne ci-dessous deux méthodes de construction de la figure initiale. On peut choisir de donner des indications aux élèves.

4 Une construction possible

On construit le cube ABCDEFGH comme ci-dessous.



On définit un point C_1 sur la diagonale $[AG]$, on définit C_1' son projeté orthogonal sur le plan (ABD) puis la sphère $\mathscr{S}_1$ de centre C_1 et de rayon C_1C_1'.

Appelons Z le point d'intersection de $[C_1G]$ avec la sphère $\mathscr{S}_1$, d_1 la droite orthogonale à (AG) dans le plan (AGC) et E' le point d'intersection de d_1 et (GE).

La bissectrice de l'angle $\widehat{GE'Z}$ coupe $[AG]$ en C_2 (démonstration : bissectrice comme ensemble de points équidistants des côtés de l'angle puis travail sur l'orthogonalité dans l'espace).

5 Une autre construction

On peut également définir l'homothétie de centre Z qui envoie A sur G : C_2 est l'image de C_1 et $\mathscr{S}_2$ l'image de $\mathscr{S}_1$.

6 Conjecture

La construction étant faite, la conjecture demandée ne pose plus de problème : la somme des volumes des deux sphères est maximale lorsque l'une des deux sphères est tangente à toutes les faces du cube.

7 Éléments de démonstration

On a

$$\sqrt{3}r_1 + \sqrt{3}r_2 + r_1 + r_2 = \sqrt{3}$$

d'où

$$r_1 + r_2 = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Notons $r_1 = x$. Les rayons sont dans $[0; \frac{1}{2}]$ d'où $x \in [\frac{-1}{2} + \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}]$.

On cherche un max de la fonction f définie sur $[\frac{-1}{2} + \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}]$ par $f(x) = x^3 + (\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} - x)^3$.

Le max est obtenu lorsque l'une des deux sphères est centrée au milieu de la diagonale et de rayon $\frac{1}{2}$.