Deux disques dans un carré

Table des matières

1 Fiche résumé

1. Niveau : seconde - première
2. Logiciel : geogebra (ou autre logiciel de géométrie dynamique).
3. Apport des tice : la construction dynamique de la figure permet d'avancer dans l'analyse et la compréhension du problème. La construction elle-même demande une réflexion mathématique.
4. Connaissances mathématiques : parabole, étude de fonction, homothétie, cercle inscrit dans un triangle.
5. Scenario : TP 1 heure en salle info et démonstration en DM.
6. Prolongement : ce tp étant fait, on peut demander un travail aux élèves consistant à reprendre la situation avec deux sphères dans un cube. On peut leur demander la construction de la figure avec geospace parallèlement à l'étude du problème.

2 Fiche élève Seconde - version 1

Dans cette version, on indique une méthode de construction du centre du deuxième cercle s'appuyant sur la définition de la parabole comme ensemble des points équidistants d'une droite et d'un point. Le principal avantage de ce procédé est de présenter ainsi au moins une fois dans l'année la parabole comme un ensemble caractérisé géométriquement : cela permet d'avoir un point d'appui pour faire comprendre, dans d'autres contextes, que la représentation graphique de la fonction $x \longmapsto x^4$ par exemple n'est pas une parabole, c'est à dire que ce que l'on appelle parabole n'est pas simplement une courbe "vaguement en forme de ...".

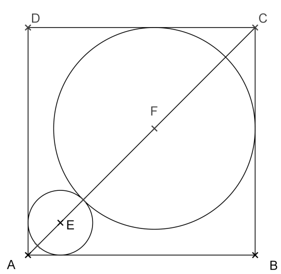
Fiche élève version 1

Deux disques, d'intersection vide, sont contenus dans un carré. On cherche positions et rayons pour que la somme des aires soit maximale.

2.1 Le problème

Le plan est muni d'un repère orthonormal.
$ABCD$ est un carré de coté 1. $\mathscr{C}_1$ est un cercle centré sur un point E de la diagonale $[AC]$, $\mathscr{C}_2$ est un cercle centré sur un point F de la diagonale $[AC]$. Ces deux cercles sont tels que :

- $\mathscr{C}_1$ est tangent à la droite (AB),
- $\mathscr{C}_2$ est tangent à la droite (CB),
- $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ sont tangents,
- $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ sont entièrement contenus dans le carré.



L'objectif est de déterminer la position des points E et F et les rayons r_1 et r_2 des cercles $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ de façon à ce que la somme des aires des disques délimités par $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ soit maximale.

Fiche élève version 1, suite

2.2 Construction de la figure avec geogebra

Dans une feuille geogebra :

1. Définir les points $A(0;0)$, $B(1,0)$ et compléter en un carré avec l'outil polygone régulier (avec $C(1,1)$ et $D(0;1)$).
2. Placer un point libre E sur le segment $[AC]$.
3. Construire le cercle $\mathscr{C}_1$ de centre E tangent au côté $[AB]$ du carré. Expliquer votre procédure.
4. Pourquoi peut-on affirmer que le cercle $\mathscr{C}_1$ est également tangent au côté $[AD]$ du carré ?
5. Pour construire le centre du deuxième cercle, vous allez utiliser la propriété suivante des paraboles :

   Soit Ω un point et Δ une droite.
   L'ensemble des points M du plan qui vérifient $M\Omega = \text{distance}(M, \Delta)$ est une parabole.

   Cette parabole peut s'obtenir avec le logiciel geogebra en tapant dans la ligne de saisie :

   $$\text{parabole}[\Omega, \Delta]$$

   Construire le cercle $\mathscr{C}_2$ avec cet outil. Expliquer votre démarche.
6. Il semble que le point E doive être sur un segment $[IJ]$ contenu dans le segment $[AC]$ afin que les contraintes imposées aux cercles soient satisfaites. Déterminer les positions des points I et J de façon expérimentale.
7. Que peut-on conjecturer sur la longueur EF ?
8. Faire une conjecture sur la (les) position(s) du point E rendant maximale la somme des aires des disques délimités par les cercles $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$.
9. Faire une conjecture sur la (les) position(s) du point E rendant minimale la somme des aires des disques délimités par les cercles $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$.
10. Définir un point M par :

    $$M = (\text{Distance}[E, Z], \pi * \text{Distance}[E, Z]\hat{}2 + \pi * \text{Distance}[Z, F]\hat{}2)$$

    Quel semble être le lieu géométrique du point M lorsque E parcourt le segment $[IJ]$?

2.3 Démontrer

1. Démontrer la relation
   $$\sqrt{2}r_1 + \sqrt{2}r_2 + r_1 + r_2 = \sqrt{2}$$
2. Donner précisément les positions des points I et J.
3. A l'aide de la fonction f de la variable $x = r_1$ donnant la somme des aires des deux disques, répondre à la question de la position du point E rendant maximale cette somme.

3 Fiche élève Seconde – version 2

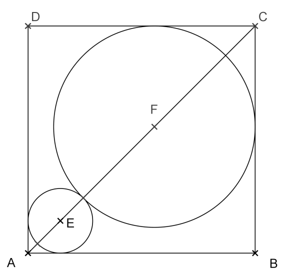
Ce deuxième scénario laisse l'élève construire le deuxième centre du cercle avec les outils de géométrie qu'un élève de seconde doit maîtriser (intersection des bissectrices d'un triangle). Cette partie de la construction peut ainsi être traitée de façon plus autonome par les élèves. La situation pourrait être éventuellement présentée de façon beaucoup moins guidée pour donner lieu à un travail de recherche (sur le modèle d'une séance « problème ouvert »).

Fiche élève version 2

Deux disques, d'intersection vide, sont contenus dans un carré. On cherche positions et rayons pour que la somme des aires soit maximale.

3.1 Le problème

Le plan est muni d'un repère orthonormal.
$ABCD$ est un carré de coté 1. $\mathscr{C}_1$ est un cercle centré sur un point E de la diagonale $[AC]$, $\mathscr{C}_2$ est un cercle centré sur un point F de la diagonale $[AC]$. Ces deux cercles sont tels que :
- $\mathscr{C}_1$ est tangent à la droite (AB),
- $\mathscr{C}_2$ est tangent à la droite (CB),
- $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ sont tangents,
- $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ sont entièrement contenus dans le carré.



L'objectif est de déterminer la position des points E et F et les rayons r_1 et r_2 des cercles $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ de façon à ce que la somme des aires des disques délimités par $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ soit maximale.

Fiche élève version 2, suite

3.2 Construction de la figure avec geogebra

Dans une feuille geogebra :

1. Définir les points $A(0;0)$, $B(1,0)$ et compléter en un carré avec l'outil polygone régulier (avec $C(1,1)$ et $D(0;1)$).
2. Placer un point libre E sur le segment $[AC]$.
3. Construire le cercle $\mathscr{C}_1$ de centre E tangent au côté $[AB]$ du carré. Expliquer votre procédure.
4. Pourquoi peut-on affirmer que le cercle $\mathscr{C}_1$ est également tangent au côté $[AD]$ du carré ?
5. Vous chercherez ensuite à construire le centre F du cercle $\mathscr{C}_2$ à l'aide de la notion de bissectrice d'un angle.
6. On note J le milieu du segment $[AC]$. Expliquez pourquoi le point E ne peut pas se trouver sur $]JC]$ et le point F sur $[AJ[$.
7. Il semble que le point E doive être sur un segment $[IJ]$ contenu dans le segment $[AC]$ afin que les contraintes imposées aux cercles soient satisfaites. Déterminer la position du point I de façon expérimentale et à l'aide de la question précédente.
8. Que peut-on conjecturer sur la longueur EF ?
9. Faire une conjecture sur la (les) position(s) du point E rendant maximale la somme des aires des disques délimités par les cercles $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$.
10. Faire une conjecture sur la (les) position(s) du point E rendant minimale la somme des aires des disques délimités par les cercles $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$.
11. Définir un point M par :

$$M = (\text{Distance}[E,Z], \pi * \text{Distance}[E,Z]\hat{}2 + \pi * \text{Distance}[Z,F]\hat{}2)$$

Quel semble être le lieu géométrique du point M lorsque E parcourt le segment $[IJ]$?

3.3 Démontrer

1. Démontrer la relation
$$\sqrt{2}r_1 + \sqrt{2}r_2 + r_1 + r_2 = \sqrt{2}$$
2. Donner précisément les positions des points I et J.
3. A l'aide de la fonction f de la variable $x = r_1$ donnant la somme des aires des deux disques, répondre à la question de la position du point E rendant maximale cette somme.

4 Fiche élève Seconde - version 3

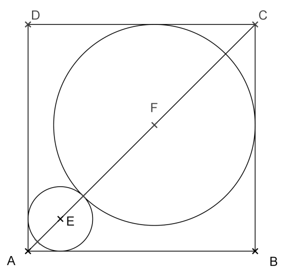
Fiche élève version 3

Deux disques, d'intersection vide, sont contenus dans un carré. On cherche positions et rayons pour que la somme des aires soit maximale.

4.1 Le problème

Le plan est muni d'un repère orthonormal.
$ABCD$ est un carré de coté 1. $\mathscr{C}_1$ est un cercle centré sur un point E de la diagonale $[AC]$, $\mathscr{C}_2$ est un cercle centré sur un point F de la diagonale $[AC]$. Ces deux cercles sont tels que :

– $\mathscr{C}_1$ est tangent à la droite (AB),
– $\mathscr{C}_2$ est tangent à la droite (CB),
– $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ sont tangents,
– $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ sont entièrement contenus dans le carré.



L'objectif est de déterminer la position des points E et F et les rayons r_1 et r_2 des cercles $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ de façon à ce que la somme des aires des disques délimités par $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ soit maximale.

Fiche élève version 3, suite

4.2 Lien entre les rayons

Montrer que dans la configuration proposée, on a la relation suivante entre les rayons r_1 et r_2 :

$$\sqrt{2}r_1 + \sqrt{2}r_2 + r_1 + r_2 = \sqrt{2}$$

4.3 Construction de la figure avec geogebra

Dans une feuille geogebra :

1. Définir les points $A(0;0)$, $B(1,0)$ et complèter en un carré avec l'outil polygone régulier (avec $C(1,1)$ et $D(0;1)$).
2. Placer un point libre E sur le segment $[AC]$.
3. Construire le cercle $\mathscr{C}_1$ de centre E tangent au côté $[AB]$ du carré. Expliquer votre procédure.
4. Pourquoi peut-on affirmer que le cercle $\mathscr{C}_1$ est également tangent au côté $[AD]$ du carré ?
5. Construire le centre du deuxième cercle à l'aide de la relation trouvée entre les rayons r_1 et r_2.
6. Il semble que le point E doive être sur un segment $[IJ]$ contenu dans le segment $[AC]$ afin que les contraintes imposées aux cercles soient satisfaites. Déterminer les positions des points I et J de façon expérimentale.
7. Faire une conjecture sur la (les) position(s) du point E rendant maximale la somme des aires des disques délimités par les cercles $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$.
8. Faire une conjecture sur la (les) position(s) du point E rendant minimale la somme des aires des disques délimités par les cercles $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$.
9. Définir un point M par :

   $$M = (\text{Distance}[E,Z], \pi * \text{Distance}[E,Z]\hat{}2 + \pi * \text{Distance}[Z,F]\hat{}2)$$

   Quel semble être le lieu géométrique du point M lorsque E parcourt le segment $[IJ]$?

4.4 Démontrer

1. Donner précisément les positions des points I et J.
2. A l'aide de la fonction f de la variable $x = r_1$ donnant la somme des aires des deux disques, répondre à la question de la position du point E rendant maximale cette somme.

5 Fiche élève Première S - version 1

Dans les versions 3 et 4, on force un procédé de construction par homothétie. La construction est donc moins "ouverte" et devrait être terminée dans des délais nettement plus brefs par les élèves. Elle peut être l'occasion de mettre en oeuvre cette notion d'homothétie dans une figure relativement complexe. En première, la partie "démonstration des conjectures" pourrait être laissée en devoir à la maison.

Fiche élève version 3

Soit $ABCD$ un carré de côté 1. On note E un point libre de la diagonale $[AC]$. Soit $\mathscr{C}_1$ le cercle de centre E tangent au côté $[AB]$ du carré. On note Z le point de $[EC]$ se trouvant à l'intersection de $\mathscr{C}_1$ et $[AC]$. h désignant l'homothétie de centre Z qui transforme A en C, on note F l'image de E par h et $\mathscr{C}_2$ l'image de $\mathscr{C}_1$ par h.

5.1 Travail avec geogebra

1. Construire la figure avec geogebra.
2. Faire une conjecture sur la position du point E rendant maximale la somme des aires des deux disques délimités par $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ lorsque ces deux disques sont entièrement contenus dans le carré $ABCD$.

5.2 Démonstration

6 Fiche élève Première S - version 2

Fiche élève version 4

Soit $ABCD$ un carré de côté 1. On note J le milieu de $[AC]$ et I le point de $[AC]$ tel que $AC = \frac{3\sqrt{2}}{2} - 2$.
On note E un point libre du segment $[IJ]$. Soit $\mathscr{C}_1$ le cercle de centre E tangent au côté $[AB]$ du carré. On note Z le point de $[EC]$ se trouvant à l'intersection de $\mathscr{C}_1$ et $[AC]$.
h désignant l'homothétie de centre Z qui transforme A en C, on note F l'image de E par h et $\mathscr{C}_2$ l'image de $\mathscr{C}_1$ par h.

6.1 Travail avec geogebra

1. Construire la figure avec geogebra.
2. Faire une conjecture sur la position du point E rendant maximale la somme des aires des deux disques délimités par $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$.

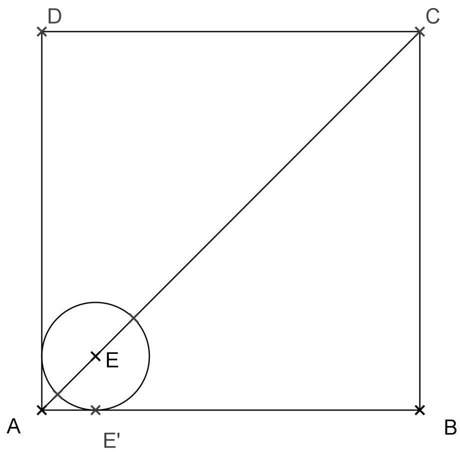
6.2 Démonstration

7 Éléments de réponse

7.1 Construction de la figure

7.1.1 Étape 1

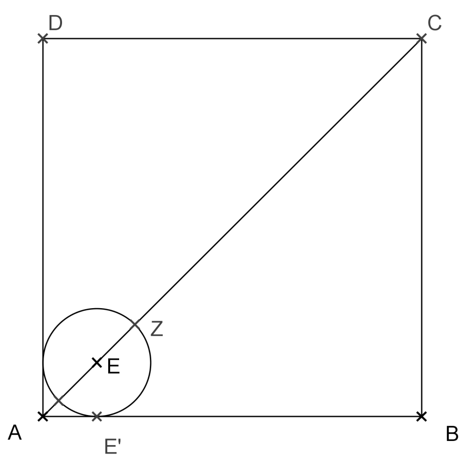
Après avoir construit le carré et placer un point E libre sur la diagonale $[AC]$, on construit E' projeté orthogonal de E sur $[AB]$.



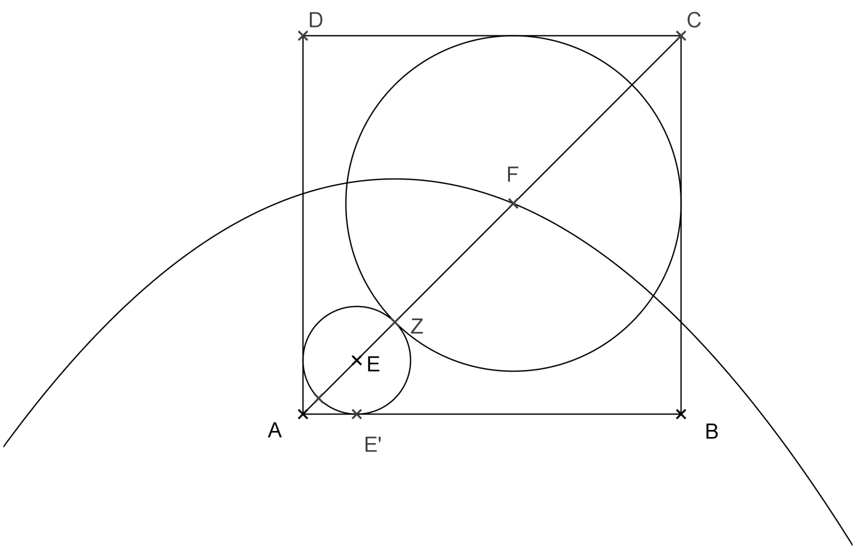
On définit le cercle $\mathscr{C}_1$ par son centre E et un point du cercle E'.

7.1.2 Étape 2 : avec une parabole

Le centre F du second cercle se trouve à égale distance du point Z (cf figure) et de la droite (CD) :

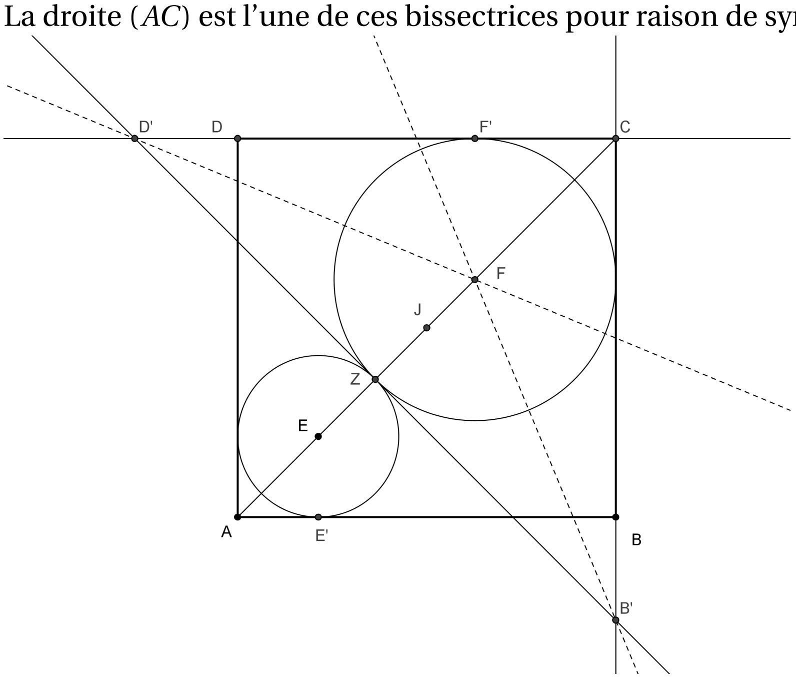


On définit donc la parabole parabole[Z,droite[D,C]] pour obtenir le centre F du cercle $\mathscr{C}_2$:



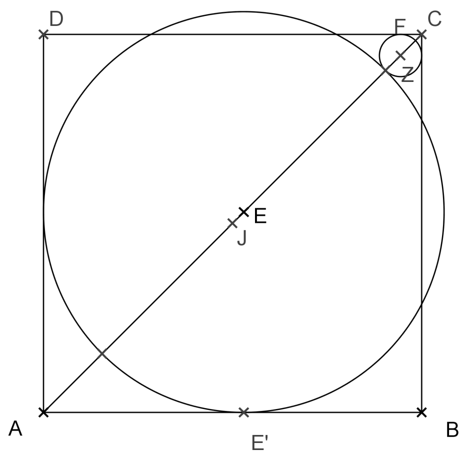
7.1.3 Étape 2 : avec les bissectrices

Soit Z le point d'intersection du cercle $\mathscr{C}_1$ et du segment $[AC]$. La tangente T_Z à $\mathscr{C}_1$ en Z est la perpendiculaire à (AC) passant par Z.
On définit alors D' point d'intersection de (CD) et T_Z et B' point d'intersection de (CB) et T_Z. Le point F, centre du cercle inscrit dans le triangle $B'D'C$, se situe à l'intersection des bissectrices de ce triangle. La droite (AC) est l'une de ces bissectrices pour raison de symétrie.



7.1.4 Étape 3 : "bornes" pour le point E

Définissons le point J milieu de $[AC]$.



Expérimentalement, on devine rapidement qu'il faut interdire au point E de se déplacer sur le segment $[JC]$ et interdire au point F de se trouver sur le segment $[AJ]$.

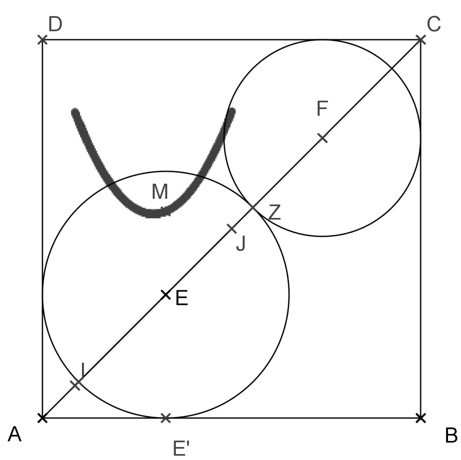
On remarque expérimentalement que l'on peut définir le point I comme image du point J par la translation de vecteur $\overrightarrow{FE}$. Cela suggère que la distance EF est constante : ce pourrait être une conjecture demandée explicitement aux élèves. C'est ensuite un point clef de la démonstration : $EF = r_1 + r_2 =$ constante, ce qui permet d'exprimer r_2 en fonction de r_1 et de ramener le problème à l'étude des variations d'une fonction d'une seule variable.

7.1.5 Somme des aires maximale

Lorsque E est en I ou en J, on obtient une aire maximale.

7.1.6 Lieu du point M

Le point M semble décrire un arc de parabole.



7.2 Démonstration

On a

$$\sqrt{2}r_1 + \sqrt{2}r_2 + r_1 + r_2 = \sqrt{2}$$

d'où

$$EF = r_1 + r_2 = 2 - \sqrt{2}$$

Notons $r_1 = x$. Les rayons sont dans $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ d'où $x \in \left[\frac{-1}{2} + 2 - \sqrt{2}; \frac{1}{2}\right]$.
On cherche un max de la fonction f définie sur $\left[\frac{-1}{2} + 2 - \sqrt{2}; \frac{1}{2}\right]$ par

$$f(x) = x^2 + \left(2 - \sqrt{2} - x\right)^2$$

soit :

$$f(x) = 2\left(x - \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)^2 + 3 - 2\sqrt{2}$$

Le max est obtenu lorsque E est en I ou en J. Le min est obtenu lorsque Z est en J, c'est à dire lorsque E est le milieu de $[IJ]$.