Université Claude Bernard–Lyon I
Agrégation interne de Mathématiques : Oral 1
Année 2010–2011

Équations différentielles linéaires scalaires de degré 2

Références : J.-M. Monier, *Analyse MP*, 5e éd., § 8.4, Dunod ; E. Ramis *et al.*, *Cours de mathématiques spéciales*, vol. 4, chap. 5, Masson ; J. Dieudonné, *Calcul infinitésimal*, chap. XIV, Hermann.
Ces notes manquent d'exemples. Plusieurs propositions de développements à la fin. La première partie semble la base, c'est une resucée des références ci-dessus.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $\mathbb{K}$ le corps des réels ou des complexes, a, b et c trois fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$. On cherche les fonctions deux fois dérivables de I dans $\mathbb{K}$ solutions de l'équation différentielle :

$$(E) \qquad x'' + ax' + bx = c.$$

Lorsque c est la fonction nulle, on parle d'équation homogène. On notera (E_0) l'équation différentielle correspondante : $x'' + ax' + bx = 0$.
On notera $\mathcal{S}$ (resp. $\mathcal{S}_0$) l'ensemble des solutions de (E) (resp. de (E_0)).

I Un système et un plan

1° Linéarité

L'application $\Phi : x \mapsto x'' - ax' - bx$, définie sur l'espace des fonctions deux fois dérivables sur I, est linéaire. Il en résulte que $\mathcal{S}_0 = \operatorname{Ker}\Phi$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et que $\mathcal{S} = \Phi^{-1}(c)$ est un espace affine dirigé par $\mathcal{S}_0$.
Pour $x : I \to \mathbb{K}$, fonction deux fois dérivable, on forme $X = (x, x') : I \to \mathbb{K}^2$, qui est dérivable. Il est évident que x est solution de (E) si, et seulement si X est solution du système différentiel

$$X' = AX + B, \quad \text{où } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix} : I \to \mathcal{M}_2(\mathbb{K}),\ B = \begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix} : I \to \mathbb{K}^2.$$

2° Un plan de solutions

On applique le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire au système différentiel précédent.

Théorème *Soit $t_0 \in I$. L'application $\mathrm{ev}_{t_0} : \mathcal{S} \to \mathbb{K}^2$, $x \mapsto (x(t_0), x'(t_0))$ est une bijection affine (et même linéaire si $c = 0$).*

Sens : unicité de la solution au problème de Cauchy pour toute condition initiale. Il est remarquable que le domaine de définition de la solution soit déterminé *a priori* : c'est une conséquence de la linéarité de l'équation. On pensera, par contraste, à l'équation $y' = y^2$, dont la solution maximale au problème de Cauchy $y(0) = 1/t_0 > 0$, à savoir $y(t) = 1/(t_0 - t)$, « explose en temps fini » (i.e. est définie seulement sur $[0, t_0[$).

3° Expression des solutions

Pas d'expression générale des solutions.

4° Wronskien

On définit le wronskien de deux solutions de (E_0) notées x_1 et x_2 comme le déterminant des solutions vectorielles X_1 et X_2 :

$$\forall t \in I, \quad w(t) = \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{vmatrix}.$$

Le wronskien w est une fonction dérivable sur I et elle satisfait à :

$$w' = -aw.$$

Il existe donc une constante C telle que $w(t) = C \exp - \int_{t_0}^{t} a$ pour tout t de I. Il en résulte que w est partout nulle ou partout non nulle. (On aurait pu déduire ce fait du théorème de Cauchy-Lipschitz.)

Application : Supposons connaître une solution x_1 de l'équation homogène (E_0) et que x_1 soit partout non nulle. Alors on peut trouver une deuxième solution de (E_0) en résolvant l'équation linéaire du premier ordre $x_1\,x_2' - x_1'\,x_2 = w$: on connaît une solution particulière x_1 de l'équation homogène associée, donc on cherche une solution sous la forme $x_2 = zx_1$. Après calculs, cela revient à calculer une primitive de $z' = w/x_1^2$.
Si la fonction x_1 s'annule, on essaie de procéder comme ci-dessus sur chaque intervalle où elle n'est pas nulle, puis de recoller les solutions.

5° Méthode de variation des constantes

Supposons connaître une base (x_1, x_2) de solutions de l'équation (E_0). On applique la méthode de variation de la constante aux solutions (X_1, X_2) du *système* $X' = AX$, c'est-à-dire que l'on cherche z_1 et z_2 dérivables de I dans $\mathbb{K}$ telles que $X = z_1X_1 + z_2X_2$ soit solution de $AX = B$. On calcule, grâce à $X_i' = AX_i$ pour $i \in \{1, 2\}$:

$$X' = z_1'X_1 + z_2'X_2 + z_1X_1' + z_2X_2' = z_1'X_1 + z_2'X_2 + z_1AX_1 + z_2AX_2 = z_1'X_1 + z_2'X_2 + AX,$$

si bien que $X' = AX + B$ équivaut à :

$$z_1'X_1 + z_2'X_2 = B, \quad \text{ou encore : } \left\{ \begin{array}{rcl} z_1'x_1 + z_2'x_2 & = & 0 \\ z_1'x_1' + z_2'x_2' & = & c \end{array} \right.$$

On est conduit à résoudre un système linéaire 2×2 dont le déterminant, w, n'est jamais nul, puis à calculer deux primitives. Au bilan (*cf.* [Dieudonné]) :

$$x(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{x_1(s)x_2(t) - x_2(s)x_1(t)}{w(s)} c(s)\,\mathrm{d}s.$$

II Équations particulières

On a vu comment résoudre l'équation si on en connaît une solution. La recherche d'une solution en général n'est pas chose facile, voici quelques situations où on peut être précis.

1° Équations à coefficients constants

Dans ce paragraphe, les fonctions a, b et c sont constantes. On peut alors donner la forme générale des solutions de (E_0) puis, dans certains cas, celle de (E). On pose $\Delta = a^2 - 4b$ et on distingue des cas :

- si Δ est un carré non nul de $\mathbb{K}$, c'est-à-dire si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $\Delta \neq 0$ ou si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\Delta > 0$: notons λ, λ' les racines de l'équation $X^2 + aX + b$, alors les solutions de (E_0) sont $t \mapsto C\exp(\lambda t) + C'\exp(\lambda' t)$, où C et C' sont des constantes ;
- si $\Delta = 0$, alors les solutions de (E_0) sont, en posant $\lambda = -a/2$, les fonctions $t \mapsto (Ct + C')\exp(\lambda t)$ (C, C' constantes) ;
- si Δ n'est pas un carré non nul de $\mathbb{K}$, c'est-à-dire si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\Delta < 0$, on fixe une racine $\lambda = \rho + i\omega$ de l'équation $X^2 + aX + b$, avec ρ et ω réels (l'autre racine est $\overline{\lambda}$) ; les solutions de (E_0) sont $t \mapsto (C\cos\omega t + C'\sin\omega t)\exp(\rho t)$ (C, C' constantes).

Une méthode vaguement originale pour prouver ces résultats consiste à constater qu'une solution de (E_0) est nécessairement de classe $\mathcal{C}^\infty$ et à interpréter l'équation comme la recherche du noyau de l'endomorphisme $D^2 + aD + b\mathrm{Id}$ agissant sur $\mathcal{C}^\infty$, où D est la dérivation $x \mapsto x'$. On applique alors le lemme des noyaux, ramenant l'étude pour les complexes à $\mathrm{Ker}(D - \lambda\mathrm{Id})$ et à $\mathrm{Ker}(D - \lambda\mathrm{Id})^2$. En remplaçant la fonction x par $t \mapsto x(t)\exp(-\lambda t)$ (variation de la constante), on se ramène à $\mathrm{Ker}\, D$ et $\mathrm{Ker}\, D^2$, ce qui se traite par le théorème des accroissements finis.
Pour la solution générale de (E), on peut reprendre la formule intégrale de Legendre ci-dessus. Mais lorsque c est le produit d'un monôme par une fonction exponentielle $t \mapsto t^k \exp(\mu t)$, il est plus commode de chercher une solution particulière sous la forme $t \mapsto P(t)\exp(\mu t)$, où P est un polynôme de degré $k + \ell$, où ℓ est la multiplicité de μ comme racine de l'équation caractéristique $X^2 + aX + b$.

Résolution par transformée de Laplace
Voir [Monier], problème 5.1 p. 345.

Phénomène de résonance
On considère une masse $m = 1$ reliée à un ressort, soumise à un frottement fluide et à une force extérieure $c = c(t)$. On repère la masse par l'allongement $x(t)$ du ressort. La masse subit de la part du ressort une force de rappel de la forme $-bx$ (où b est la raideur du ressort) et une force de frottement proportionnelle à la vitesse, de la forme $-ax'$ $(a > 0)$. L'équation de Newton s'écrit :

$$x'' = -ax' - bx + c, \quad (a > 0,\ b \geq 0).$$

Cette même équation modélise également les circuits RLC.
Si $a = 0$, les solutions de l'équation homogène sont périodiques. Si $a > 0$ n'est pas trop grand, plus précisément si $a^2 - 4b < 0$, les solutions sont de la forme $C\cos(\omega t + \phi)\exp(\rho t)$, où ω et $\rho < 0$ ont été définis ci-dessus. Pour $a^2 > 4b$, il n'y a plus du tout d'oscillation.
Observons la réponse d'un tel système à une excitation sinusoïdale : on suppose que $c(t) = F\cos(\omega t)$, où F et $\omega > 0$ sont fixés. Il est en fait plus commode de supposer que $c(t) = F\exp(i\omega t)$ et de considérer a postériori la partie réelle des solutions obtenues. On cherche une solution particulière sous la forme $x(t) = H\exp(i\omega t)$. On obtient :

$$\big((b - \omega^2) + ia\omega\big)\, H = F, \quad \text{d'où } |H| = \frac{|F|}{\sqrt{(b - \omega^2)^2 + a^2\omega^2}}.$$

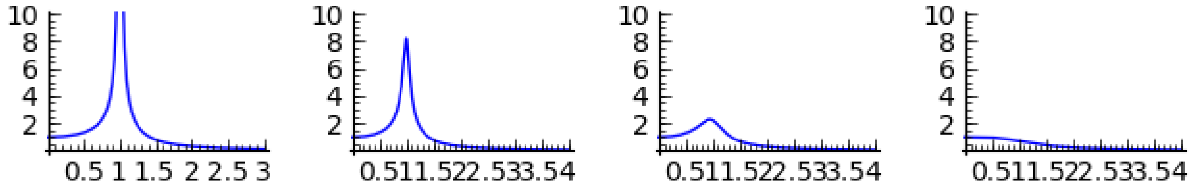
On constate que pour $a = 0$ et $\omega^2 = b$, solution physiquement irréaliste car sans déperdition d'énergie, l'amplitude de la réponse $|H|$ peut être infinie alors que la force appliquée est finie. Pour a non nul, la fonction $\omega \mapsto |H|/|F|$ ci-dessus atteint son maximum en

$$\omega_0 = \sqrt{b - \frac{a^2}{2}}.$$

Si a n'est pas trop grand, elle est croissante puis décroît vers 0 en l'infini. La valeur maximale qu'elle atteint est, aux erreurs de calcul près :

$$\frac{1}{a\sqrt{\frac{1}{4} + b - \frac{a^2}{2}}}.$$

Ainsi, l'amplitude peut être très importante si le coefficient de frottement a n'est pas très grand.
Voici des graphes représentant $|H|/|F|$ en fonction de ω pour différentes valeurs de a.



2° **Recherche de solutions développables en série entière**

Lorsque a, b et c sont des fractions rationnelles en t dont le dénominateur n'est pas une puissance de t, il est raisonnable de chercher des solutions de (E) développables en série entière au voisinage de 0. La stratégie est de supposer l'existence d'une telle solution, de déduire de (E) des équations de récurrence portant sur les coefficients du développement en série, de prouver qu'il existe au moins une suite de coefficients qui définit une série entière de rayon strictement positif.

Certaines familles de polynômes orthogonaux peuvent apparaître de cette façon, par exemple les polynômes de :

– Chebyshev de première espèce : $(1-t^2)x'' - tx' + n^2 x = 0$;
– Chebyshev de deuxième espèce : $(1-t^2)x'' - 3tx' + n(n+2)x = 0$;
– Legendre : $(1-t^2)x'' - 2tx' + n(n+1)x = 0$;
– Hermite : $x'' - 2tx' + 2nx = 0$.

Voici un exemple d'énoncé précis : pour $\mu \in \mathbb{C}$, on considère l'équation de Bessel :

$$t^2 x'' + tx' + (t^2 - \mu)x = 0.$$

Elle admet une solution non nulle développable en série entière au voisinage de 0 si, et seulement si λ est le carré d'un entier.

En effet, si $x(t) = \sum_{n\geq 0} a_n t^n$ est une telle solution, les calculs habituels et le principe des zéros isolés donnent les relations : $a_0 = (1-\mu)a_1 = 0$ et, pour $n \geq 2$, $(n^2-\mu)a_n = a_{n-2}$. La solution est identiquement nulle, à moins que $\mu = N^2$ pour un certain $N \in \mathbb{N}$. La série correspondante est paire ou impaire et, vu que $\lim_{n\to+\infty} a_n/a_{n-2} = 0$, le rayon de convergence est infini.

Référence (et formule fermée pour les a_n) : [Dieudonné], chap. XV.

3° **Équations différentielles et polynômes orthogonaux**

On s'intéresse aux équations :

$$qx'' + \ell x' - \lambda x = 0,$$

où q est un polynôme de degré au plus 2, ℓ est un polynôme de degré au plus 1, x est la fonction inconnue et λ est un scalaire inconnu.

On cherche des situations où on a une famille infinie de polynômes solutions. Notons $\mathrm{cd}(p)$ le coefficient dominant d'un polynôme p. Si p est un polynôme unitaire de degré n, les termes dominants sont :

$$qp''(t) = n(n-1)\mathrm{cd}(q)\, t^{n+\deg q-2} + \cdots, \quad \ell p'(t) = n\mathrm{cd}(\ell)\, t^{n+\deg \ell -1} + \cdots.$$

Pour avoir une infinité de solutions, il faut qu'il y ait des simplifications et donc que les degrés de qp'' et de $\ell p'$ ne dépassent pas celui de p, ce qui impose les conditions précédentes sur q et ℓ. Dans ces conditions, l'opérateur $\mathcal{L} : \mathbb{R}[T] \to \mathbb{R}[T]$, $p \mapsto qp'' + \ell p'$ se restreint en un endomorphisme $\mathcal{L}_n$ de $\mathbb{R}_n[T]$ pour tout n. On en déduit par récurrence que $\mathcal{L}_n$ a n valeurs propres réelles distinctes, ce qui se voit aussi par un calcul simple (la matrice de $\mathcal{L}_n$ dans la base $(1, T, \cdots, T^n)$ est triangulaire !).

L'idée est de prouver que, sous certaines hypothèses, $\mathcal{L}_n$ est diagonalisable : on exhibe un produit scalaire pour lequel $\mathcal{L}_n$ *est un endomorphisme symétrique*. On obtient alors, pour chaque degré,

un polynôme propre pour $\mathcal{L}$. Il se trouve que toutes les valeurs propres sont distinctes, si bien que les vecteurs propres correspondants sont orthogonaux. Finalement, à des scalaires près, la famille de polynômes orthogonaux coïncide avec la base orthogonalisée de Gram-Schmidt de la base canonique. On retrouve par cette construction les polynômes de Chebyshev, Hermite, Laguerre, Legendre, Jacobi...
Référence : A. Yger et J.-A. Weil (dir.), *L3 Mathématiques appliquées*, Pearson Education, paragraphe II.6.

4° Théorie de Sturm-Liouville

Une équation de Sturm-Liouville est une équation de la forme :

$$\big(px'\big)' + qx = 0,$$

où p est une fonction dérivable strictement positive sur I compact, disons $I = [0, 1]$, et q une fonction continue. Le cas particulier $p = 1$ est souvent considéré.
Toute équation (E) se ramène à une équation de Sturm-Liouville par un changement de fonction inconnue : si on pose $x = zy$ où z et y sont deux fonctions de t, l'équation (E) devient

$$zy'' + (2z' + az)y' + (z'' + az' + bz)y = c,$$

si bien qu'il suffit de choisir z solution de $2z' + az = 0$, c'est-à-dire $z(t) = \exp(-\frac{1}{2}\int_{t_0}^t a)$.
Le principal problème de la théorie de Sturm-Liouville est l'étude, lorsque $p > 0$ et $q \geq 0$, du spectre de l'opérateur $x \mapsto (-px')' + qx$ sur l'espace des solutions du problème de Dirichlet $x(0) = 0 = x(1)$. On montre que le spectre est *discret* et on espère, à terme, développer les solutions dans la base des solutions propres.
Cela semble savant mais dans le cas le plus simple, l'opérateur est $x \mapsto -x'' + 4\pi^2 x$ dont les fonctions propres sont les exponentielles $t \mapsto \exp(i2\pi nt)$: le développement espéré est donc le développement en série de Fourier.
Voir par exemple Ariel Dufetel, *Analyse : séries de Fourier et équations différentielles*, chapitre 2, problème 5.

Il y a un autre phénomène plus simple, à savoir l'entrelacement des zéros des solutions d'équations de Sturm-Liouville $x'' + b_1 x = 0$ et $x'' + b_2 x = 0$ lorsque $b_1 \geq b_2$.
On pourra extraire un développement assez simple dans le livre de Dieudonné, *Calcul infinitésimal*, chap. XIV, § 7.