Université Claude Bernard–Lyon I
Agrégation interne de Mathématiques : Analyse
Année 2012–2013

Trois calculs de l'intégrale de Gauss

Trois méthodes pour calculer $I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ et une application.

1° Méthode élémentaire

Cette méthode ramène le calcul de I aux intégrales de Wallis.

1. Vérifier que pour tout x réel, on a : $1 - x^2 \leq e^{-x^2} \leq \frac{1}{1+x^2}$.
2. En déduire que pour tout n naturel non nul, on a :

$$\int_0^1 (1-x^2)^n dx \leq \int_0^{+\infty} e^{-nx^2} dx \leq \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n} dx.$$

3. Pour chacune des intégrales ci-dessus, faire, dans l'ordre, un des changements de variables suivants : $x = \cos t$, $t = \sqrt{n}\, x$, $x = \cot t$ (attention : cotangente et pas cosinus...).
4. À l'aide des intégrales de Wallis (réciter, voir l'épreuve écrite n°1 de 2009 du CAPES par exemple ou passer à la suite), en déduire la valeur de I.

2° Intégrale à paramètre

Cette version n'est pas adaptée au programme du CAPES car elle est très pénible sans le théorème de convergence dominée. La variante ci-dessous, elle, n'a pas ce défaut mais elle est (encore ?) plus artificielle.
Pour t réel strictement positif, on pose

$$h(t) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx^2}}{1+x^2} dx.$$

1. Montrer que h est bien définie et continue.
2. Montrer que h est dérivable et calculer sa dérivée. Établir une équation différentielle dont h est solution.
3. Résoudre cette équation différentielle. (Il apparaît une constante d'intégration et une primitive qui se ramène à celle de $u \mapsto e^{-u^2}$.)
4. En comparant la limite de h en $+\infty$ et sa valeur en 0, déterminer la valeur de la constante. En déduire la valeur de I.

3° Variante

Pour t réel positif ou nul et C constante réelle, on pose :

$$g(t) = \left(\int_0^t e^{-x^2} dx \right)^2 + C \int_0^1 \frac{e^{-t^2(1+x^2)}}{1+x^2} dx.$$

1. Vérifier que g est bien définie. Calculer $g(0)$.
2. Montrer que g est dérivable et calculer sa dérivée.
3. Vérifier que pour C bien choisie, g est constante.
4. En étudiant la limite de g en $+\infty$, calculer I.

4° **Intégrale double**

Pour r réel positif, on définit un carré et un quart de disque par :

$$K_r = [0,r] \times [0,r], \quad D_r = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : \ x \geq 0, \ y \geq 0, \ x^2 + y^2 \leq r^2\}.$$

1. Montrer que l'on a :
$$I^2 = \lim_{r \to \infty} \iint_{K_r} e^{-x^2-y^2} dx\, dy.$$
2. En passant en coordonnées polaires, calculer l'intégrale double
$$\iint_{D_r} e^{-x^2-y^2} dx\, dy.$$
3. En remarquant que $D_r \subset K_r \subset D_{r\sqrt{2}}$, calculer I.

5° **Intégrales de Fresnel**

Ce sont
$$J = \int_0^{+\infty} \cos(x^2) dx \quad \text{et} \quad K = \int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx.$$
On se place dans le plan complexe. Pour r positif ou nul, on définit un chemin par la concaténation de trois courbes :

– S_r le segment $[0,r]$, parcouru de 0 vers r,

– T_r l'arc de cercle de centre 0 et de rayon r compris entre les arguments 0 et $\pi/4$, parcouru dans le sens trigonométrique,

– U_r le segment $[re^{i\pi/4}, 0]$ parcouru de $re^{i\pi/4}$ vers 0.

Pour V une courbe paramétrée et f une fonction continue sur $\mathbf{C}$, on note $\int_V f(z)dz$ l'intégrale curviligne de f le long de V.

1. On veut montrer que pour tout r, $\int_{S_r \cup T_r \cup U_r} e^{-z^2} dz = 0$.
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$ et toute courbe fermée V, on a : $\int_V z^n dz = 0$. (Utiliser le fait que $z^{n+1}/(n+1)$ est une «primitive» de la fonction à intégrer.)
   (b) Développer e^{-z^2} en série entière et justifier la permutation de la série et de l'intégrale. En déduire le résultat annoncé.
2. On veut montrer que $\lim_{r \to +\infty} \int_{T_r} e^{-z^2} dz = 0$.
   (a) Vérifier que pour $t \in [0, \pi/2]$, on a $\sin t \geq 2t/\pi$.
   (b) Calculer le module de e^{-z^2} lorsque $z \in T_r$ et en déduire la limite annoncée.
3. Démontrer enfin que J et K existent et calculer $J + iK$ à l'aide de $I = \lim_{r \to \infty} \int_{S_r} e^{-z^2} dz$.