CORRIGE DE L' EPREUVE DE MATHS1 MP DE L'ECOLE NATIONAL DES PONTS ET CHAUSSES

A.NAIMI

A. Questions préliminaires

1. - Par hypothèse f est intégrable sur $\mathbb{R}$ (et son intégrale sur $\mathbb{R}$ vaut 1), et pour tout $t \in \mathbb{R}$, le module de la fonction : $x \to e^{itx} f(x)$ est f ,
par suite la fonction : $x \to e^{itx} f(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, d'où l'existence de $\Phi_f(t)$ et donc de la fonction Φ_f.
- Nous avons pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\Phi_f(t) = \int_{\mathbb{R}} h(t,x)dx$, où l'on a posé $h(t,x) = e^{itx} f(x)$.
La fonction h est continue comme, produit de fonctions continues, de plus pour tout k entier naturel, $\dfrac{\partial^k h}{\partial x^k}$ existe en tout point $(x,t) \in \mathbb{R}^2$
Ppour tout $(x,t) \in \mathbb{R}^2$, $\dfrac{\partial^k h}{\partial x^k}(x,t) = (ix)^k h(t,x)$ et cette dernière fonction est continue comme produit de fonctions continues et elle verifie :
$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2, \quad \left| \frac{\partial^k h}{\partial x^k}(x,t) \right| = |x|^k f(x)$$
de plus par hypothèse la fonction $x \to |x|^k f(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.
On conclut alors par le théorème de dérivabilité sous signe intégrale que la fonction Φ_f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \forall k \in \mathbb{N} \qquad \Phi_f^{(k)}(t) = \int_{\mathbb{R}} (ix)^k e^{itx} f(x) dx.$$
En particulier :
$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad \Phi_f^{(k)}(0) = i^k . a_k(f).$$
2. Soit x un réel et $n \geq 1$. Notons h la fonction définie sur $\mathbb{R}$, par $h(t) = e^{it}$. Cette fonction étant de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, donc d'après l'inégalité de Taylor-Lagrange appliquée à cette fonction à l'ordre $n-1$ entre 0 et x, on a :
$$\left| h(x) - \sum_{m=0}^{n-1} \frac{x^m}{m!} h^{(m)}(0) \right| \leq \frac{|x|^n}{n!} \sup_{t \in J} \left| h^{(n)}(t) \right|$$
où J est le segment d'extremités 0 et x. Mais pour tout m, $h^{(m)}(0) = i^m$ et tout $t \in J$, $\left| h^{(n)}(t) \right| = \left| i^n e^{it} \right| = 1$, d'où l'inégalité demandée.
3. Comme, la fonction $t \to e^{-ita} - e^{-itb}$ est dérivable en 0 et sa dérivé en 0 est $i(b-a)$, alors :
$$\lim_{t \to 0} \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{t} = i(b-a),$$
donc $\lim_{t \to 0} h_{a,b}(t) = b - a$ et par suite la fonction $h_{a,b}$ est continue en 0. D'autre part cette fonction est continue en tout point de $\mathbb{R}^*$ car elle est rapport de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}^*$. Finalement cette fonction est continue sur $\mathbb{R}$.
4. Soit $t \in \mathbb{R}^*$, alors $|h_{a,b}(t)| = \left| \int_a^b e^{-itx} dx \right| \leq \int_a^b \left| e^{-itx} \right| dx = \int_a^b dx = b - a$. et cette dernière inégalité est valable pour $t = 0$. D'où pour tout t réel,
$$|h_{a,b}(t)| \leq b - a.$$
5. Soit $k \in \mathbb{N}$, comme $e^k = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{k^n}{n!}$ est la somme d'une série de nombres réel positifs, alors :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \frac{k^n}{n!} \leq e^k$$
en particulier :
$$\frac{k^k}{k!} \leq e^k.$$

6. Soit $(\theta,T)\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}^+$. Puisque la fonction $t\to\frac{\sin(\theta t)}{t}$ est paier, alors $\int_{-T}^{T}\frac{\sin(\theta t)}{t}dt=2.\int_0^T\frac{\sin(\theta t)}{t}dt$, mais par le changement de variable : $x=\theta t$, on a :

$$\int_0^T\frac{\sin(\theta t)}{t}dt=\int_0^{\theta T}\frac{\sin x}{x}dx.$$

Par suite $R(\theta,T)=2.S(\theta T)$., et cette dernière égalité est valable pour $\theta=0$, puisque $R(0,T)=S(0)=0$. D'où

$$\forall(\theta,T)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+,\qquad R(\theta,T)=2.S(\theta T).$$

7. D'après la question précédente pour tout $T>0$, on a :

$$R(x,T)-R(y,T)=2.(S(xT)-S(yT))$$

ou encore $R(x,T)-R(y,T)=2.\left(\int_0^{xT}\frac{\sin t}{t}dt-\int_0^{yT}\frac{\sin t}{t}dt\right)$ pour tout $T>0$, soit :

$$\forall T>0,\quad R(x,T)-R(y,T)=2.\int_{yT}^{xT}\frac{\sin t}{t}dt$$

et compte tenue de la formule : $\lim\limits_{u\to+\infty}\int_0^u\frac{\sin t}{t}dt=\frac{\pi}{2}$ et de la parité de la fonction qui est sous l'intégrale, on peut écrire :

$$\lim_{T\to+\infty}(R(x,T)-R(y,T))=\begin{cases}2.\frac{\pi}{2}=\pi,\ \text{si } y=0 \text{ et } x>0\\ 2.(-\frac{\pi}{2})=-\pi,\ \text{si } y=0 \text{ et } x<0\\ -\pi,\ \text{si } y>0 \text{ et } x=0\\ \pi,\ \text{si } y<0 \text{ et } x=0\\ 4(\frac{\pi}{2})=2\pi,\ \text{si } y<0 \text{ et } x>0\\ -2\pi,\ \text{si } y>0 \text{ et } x<0\\ 0 \ \text{si } xy>0\end{cases}$$

8. Soit $T\rangle 0$. Alors d'une part, $\forall t\in[-T,T]$, la fonction $x\to h_{a,b}(t).e^{itx}.f(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, par intégrabilité de la fonction f, d'autre part, la fonction

$$t\to\int_{\mathbb{R}}\left|h_{a,b}(t).e^{itx}.f(x)\right|dx=|h_{a,b}(t)|\int_{\mathbb{R}}f(x)dx=|h_{a,b}(t)|$$

est intégrable sur $[-T,T]$, car continue sur ce segment, par suite on peut permuter les intégrales et écrire :

$$\int_{-T}^{T}\left(\int_{\mathbb{R}}h_{a,b}(t)e^{itx}f(x)dx\right)dt=\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{-T}^{T}h_{a,b}(t)e^{itx}f(x)dt\right)dx$$

. ou encore $\int_{-T}^{T}h_{a,b}(t)\left(\int_{\mathbb{R}}e^{itx}f(x)dx\right)dt=\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{-T}^{T}h_{a,b}(t)e^{itx}dt\right).f(x)dx$. D'où

$$\int_{-T}^{T}h_{a,b}(t)\Phi_f(t)dt=\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{-T}^{T}h_{a,b}(t)e^{itx}dt\right).f(x)dx$$

Or pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$\int_{-T}^{T}h_{a,b}(t)e^{itx}dt=\int_{-T}^{T}\frac{e^{it(x-a)}-e^{it(x-b)}}{it}dt=\int_{-T}^{T}\frac{\cos t(x-a)-\cos t(x-b)}{it}dt+\int_{-T}^{T}\frac{\sin t(x-a)-\sin t(x-b)}{t}dt$$

et $\int_{-T}^{T}\frac{\cos t(x-a)-\cos t(x-b)}{it}dt=0$ car la fonction sous l'intégrale est impair, par suite

$$\forall x\in\mathbb{R},\qquad\int_{-T}^{T}h_{a,b}(t)e^{itx}dt=\int_{-T}^{T}\frac{\sin t(x-a)-\sin t(x-b)}{t}dt.$$

Mais $\int_{-T}^{T}\frac{\sin t(x-a)-\sin t(x-b)}{t}dt=R(x-a,T)-R(x-b,T)$. Finalement

$$\int_{-T}^{T}h_{a,b}(t)\Phi_f(t)dt=\int_{\mathbb{R}}\left(R(x-a,T)-R(x-b,T)\right).f(x)dx.$$

Et pour conclure, on va montrer que $\lim\limits_{T\to+\infty}\int_{\mathbb{R}}\left(R(x-a,T)-R(x-b,T)\right).f(x)dx=2\pi\int_a^b f(x)dx$.

En effet soit $(T_n)_n$ une suite de nombres réels strictement positifs divergente vers $+\infty$ et montrons que $\lim\limits_{n\to+\infty}$ $\int_{\mathbb{R}} \left(R(x-a,T_n)-R(x-b,T_n)\right).f(x)dx = 2\pi\int_a^b f(x)dx$.
Notons alors pour tout $n\in\mathbb{N}$ et pour tout $x\in\mathbb{R}$:

$$h_n(x) = \left(R(x-a,T_n)-R(x-b,T_n)\right).f(x) \quad \text{et} \quad f_n(x) = R(x-a,T_n)-R(x-b,T_n).$$

D'après le **7)**, la suite de fonctions $(h_n)_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction h définie pour tout réel x, par :

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x<a \text{ ou } x>b \\ 2\pi f(x) & \text{si } x\in]a,b[\end{cases}$$

.

D'autre part,d'après le **6),** on a pour tout $n\in\mathbb{N}$ et pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f_n(x) = 2.(S((x-a)T_n)-S((x-b)T_n))$, et comme S est continue sur $\mathbb{R}$ et admet une limite finie en $+\infty$ (qui vaut $\frac{\pi}{2}$) et en $-\infty$ (car impaire), elle est bornée sur $\mathbb{R}$.
Et si on note $M = \sup\limits_{T\in\mathbb{R}} |S(T)|$, alors pour tout $n\in\mathbb{N}$ et pour tout $x\in\mathbb{R}$, $|f_n(x)|\leq 2M$ et par suite

$$\forall n\in\mathbb{N} \quad \text{et} \quad \forall x\in\mathbb{R}, \quad |h_n(x)|\leq 2Mf(x)$$

et de plus cette fonction (dominante) $x\to 2Mf(x)$ est positive intégrable sur $\mathbb{R}$.
On conclut alors par le théorème de convergence dominé que :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}} h_n(x)dx = \int_{\mathbb{R}} h(x)dx$$

ou encore

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}} \left(R(x-a,T_n)-R(x-b,T_n)\right).f(x)dx = 2\pi\int_a^b f(x)dx.$$

Donc d'après la caracterisation sequentielle des limites :

$$\lim_{T\to+\infty}\int_{\mathbb{R}} \left(R(x-a,T)-R(x-b,T)\right).f(x)dx = 2\pi\int_a^b f(x)dx$$

D'où $\lim\limits_{T\to+\infty}\int_{-T}^T h_{a,b}(t)\Phi_f(t)dt = 2\pi\int_a^b f(x)dx$ ou encore

$$\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^T h_{a,b}(t)\Phi_f(t)dt = \int_a^b f(x)dx.$$

9. Soit $a,b\in\mathbb{R}$, tels que $a\langle b$.
Comme $\Phi_f=\Phi_g$, alors

$$\forall T>0, \qquad \frac{1}{2\pi}\int_{-T}^T h_{a,b}(t)\Phi_f(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-T}^T h_{a,b}(t)\Phi_g(t)dt,$$

donc compte tenue de la question précédente et par passage à la limite ($T\to+\infty$), on obtient :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx.$$

Finalement pour tout $a<b$, $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$, donc, pour tous $a,b\in\mathbb{R}$,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx.$$

Et si on note pour tout y réel, $F(y)=\int_0^y f(x)dx$ et $G(y)=\int_0^y g(x)dx$, alors par continuité des fonctions f,g sur $\mathbb{R}$, les fonctions F et G sont respectivement des primitives sur $\mathbb{R}$ des fonctions f,g et de plus, d'après de ce qui précède, elle sont égales, donc $F'=G'$, d'où $f=g$.

10. La fonction f_0 est positive, continue en chaque point de $\mathbb{R}^*$, d'autre part, $\lim\limits_{x\to0^+} f_0(x) = \lim\limits_{u\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}-u} = 0$ et $\lim\limits_{x\to0^-} f_0(x) = 0 = f_0(0)$. Ce qui justifie la continuité de cette fonction sur $\mathbb{R}$. D'autre part, puisque cette fonction est nulle sur $\mathbb{R}^-$ il suffit de justifier son intégrabilité sur $]0,+\infty[$. En effet,

$$\forall\varepsilon>0,\ \forall A>0, \quad \int_\varepsilon^A f_0(x)dx = \int_\varepsilon^A \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.\frac{e^{-\frac{\ln^2 x}{2}}}{x}dx.$$

Et si $\varepsilon > 0$, alors après le changement de variable : $u = \ln x$, on obtient :

$$\int_{\varepsilon}^{A} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.\frac{e^{-\frac{\ln^2 x}{2}}}{x} dx = \int_{\ln\varepsilon}^{\ln A} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

Mais d'après le résultat admis dans l'enoncé :

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.e^{-\frac{u^2}{2}} du = 1$$

donc par passage à la limite ($\varepsilon \to 0^+$ et $A \to +\infty$), on obtient :

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.\frac{e^{-\frac{\ln^2 x}{2}}}{x} dx = 1,$$

d'où (f_0 étant positive) f_0 est intégrable sur $]0, +\infty[$ et $\int_0^{+\infty} f_0(x)dx = 1$. On conclue alors que la fonction f_0 est intégrable sur $\mathbb{R}$ et $\int_{\mathbb{R}} f_0(x)dx = 1$. et par suite $.f_0 \in E$.

11. Soient $k \in \mathbb{N}^*$, $\varepsilon > 0$ et $A > 0$, on a :

$$\int_{\varepsilon}^{A} x^k.f_0(x)dx = \int_{\varepsilon}^{A} x^k.\frac{1}{\sqrt{2\pi}}.\frac{e^{-\frac{\ln^2 x}{2}}}{x} dx = \int_{\varepsilon}^{A} x^{k-1}.\frac{1}{\sqrt{2\pi}}.e^{-\frac{\ln^2 x}{2}} dx \underset{u=\ln x}{=} \int_{\ln\varepsilon}^{\ln A} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.e^{(ku-\frac{u^2}{2})} du.$$

Mais d'après le résultat admis dans l'enoncé :

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.e^{(ku-\frac{u^2}{2})} du = e^{\frac{k^2}{2}},$$

donc par passage à la limite ($\varepsilon \to 0^+$ et $A \to +\infty$), on obtient :

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{(ku-\frac{u^2}{2})} du = e^{\frac{k^2}{2}},$$

d'où ($x \to x^k f_0$ étant positive) $x \to x^k\ f_0$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ et $\int_0^{+\infty} x^k.f_0(x)dx = e^{\frac{k^2}{2}}$. Or cette fonction est nulle sur $\mathbb{R}^-$, on conclue alors qu'elle est intégrable sur $\mathbb{R}$ et que

$$a_k(f_0) = \int_{\mathbb{R}} x^k.f_0(x)dx = e^{\frac{k^2}{2}},$$

et on remarque que cette formule est valable pour $k = 0$. finalement la fonction f_0 admet des moments de tous ordres et pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$a_k(f_0) = e^{\frac{k^2}{2}}.$$

12. La fonction $x \to 1 + a\sin(2\pi \ln x)$ est bornée (positive)sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} f_0(x) = 0$ car f_0 est continue, donc $\lim\limits_{x\to 0^+} f_0(x).(1 + a\sin(2\pi\ln x)) = 0$, d'autre part f_a est nulle sur $\mathbb{R}^-$ et est continue en tout point de $\mathbb{R}_+^*$ comme produit de fonction continues. Finalement elle est continue sur $\mathbb{R}$. D'autre part, comme elle est nulle sur $\mathbb{R}^-$, alors il suffit de justifier son intégrabilité sur $]0, +\infty[$. En effet

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \int_{\frac{1}{n}}^{n} .f_a(x)dx = \int_{\frac{1}{n}}^{n} f_0(x).(1 + a\sin(2\pi\ln x))dx = \int_{\frac{1}{n}}^{n} f_0(x)dx + a.\int_{\frac{1}{n}}^{n} .f_0(x)\sin(2\pi\ln x)dx.$$

Et en effectuant le changement de variable $u = \ln x$ (qui est légitime) :

$$a.\int_{\frac{1}{n}}^{n} .f_0(x)\sin(2\pi\ln x)dx = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\ln n}^{\ln n} e^{-\frac{1}{2}u^2}\sin(2\pi u)du$$

et cette dernière intégrale est nulle puisque la fonction sous l'intégrale est impaire, donc

$$\int_{\frac{1}{n}}^{n} .f_a(x)dx = \int_{\frac{1}{n}}^{n} f_0(x)dx.$$

Or $\int_{\mathbb{R}} f_0(x)dx = 1$ et $\int_0^{+\infty} f_0(x)dx = \int_{\mathbb{R}} f_0(x)dx.$, par suite f_a est intégrable sur $\mathbb{R}$ et $\int_{\mathbb{R}} f_a(x)dx = 1$. D'où $f_a \in E$.

Soit maintenant $k \in \mathbb{N}$. Alors pour tout $n \geq 1$,

$$\int_{\frac{1}{n}}^{n} x^k.f_a(x)dx = \int_{\frac{1}{n}}^{n} x^k f_0(x)dx + a.\int_{\frac{1}{n}}^{n} x^k.f_0(x)\sin(2\pi\ln x)dx.$$

Et en effectuant le changement de variable $u = \ln x$ (qui est légitime) :

$$a.\int_{\frac{1}{n}}^{n} x^k.f_0(x)\sin(2\pi\ln x)dx = \frac{a}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\ln n}^{\ln n} e^{ku}.e^{-\frac{1}{2}u^2}\sin(2\pi u)du.$$

Or $\int_{-\ln n}^{\ln n} e^{ku}.e^{-\frac{1}{2}u^2}\sin(2\pi u)du = \mathrm{Im}(\int_{-\ln n}^{\ln n} e^{ku}e^{-\frac{1}{2}u^2}e^{2i\pi u}du)$ et d'après le résultat admis dans l'enoncé :

$$\int_{\mathbb{R}} e^{(k+2i\pi)u-\frac{1}{2}u^2}du = \sqrt{2\pi}e^{\frac{1}{2}(k+2i\pi)^2},$$

donc par passage à la limite ($n \to +\infty$), on obtient :

$$a.\int_0^{+\infty} x^k.f_0(x)\sin(2\pi\ln x)dx = \frac{a.}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{Im}(\int_{\mathbb{R}} e^{ku}e^{-\frac{1}{2}u^2}e^{2i\pi u}du) = a\,\mathrm{Im}\left(e^{\frac{1}{2}(k+2i\pi)^2}\right)$$

Mais $e^{\frac{1}{2}(k+2i\pi)^2} = e^{\frac{1}{2}k^2-2\pi^2}e^{2i\pi} = e^{\frac{1}{2}k^2-2\pi^2}$ et donc sa partie imaginaire est nulle. D'où :

$$a.\int_0^{+\infty} x^k.f_0(x)\sin(2\pi\ln x)dx = 0$$

et par suite $\int_0^{+\infty} x^k.f_a(x)dx = \int_0^{+\infty} x^k f_0(x)dx$ et comme les deux focntions sous l'intégrale sont nulles sur $\mathbb{R}^-$, alors

$$a_k(f_a) = \int_{\mathbb{R}} x^k.f_a(x)dx = \int_{\mathbb{R}} x^k f_0(x)dx = a_k(f_0).$$

13. Soit $k \in \mathbb{N}$. Comme $f \geq 0$, continue, alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad |x|^{2k+1} f(x) = (|x|^k\sqrt{f(x)}).(|x|^{k+1}\sqrt{f(x)})$$

et ces deux fonctions sont continues sur $\mathbb{R}$, et l'inégalité de Cauchy Scwartz donne :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \left(\int_{-n}^{n}(|x|^k\sqrt{f(x)}).(|x|^{k+1}\sqrt{f(x)})\right)^2 \leq (\int_{-n}^{n} x^{2k}f(x)dx).(\int_{-n}^{n} x^{2k+2}f(x)dx).$$

Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \left(\int_{-n}^{n}|x|^{2k+1}f(x)dx\right)^2 \leq (\int_{-n}^{n} x^{2k}f(x)dx).(\int_{-n}^{n} x^{2k+2}f(x)dx)..$$

De plus f admet des moments de tous ordres, donc par passage à la limite dans cette dernière inégalité, on obtient le resultat demandé.

14. Soit $k \in \mathbb{N}^*$, alors :

$$\frac{b_{2k}(f)^{\frac{1}{2k}}}{2k} = \frac{a_{2k}(f)^{\frac{1}{2k}}}{2k} \qquad \text{car } \ b_{2k}(f) = a_{2k}(f) = \int_{\mathbb{R}} x^{2k}f(x)dx.$$

Mais par hypothèse $\frac{a_{2k}(f)^{\frac{1}{2k}}}{2k} \leq M$ et $M\rangle 0$, donc$\frac{a_{2k}(f)^{\frac{1}{2k}}}{2k} \leq 2M$, par suite $\frac{b_{2k}(f)^{\frac{1}{2k}}}{2k} \leq 2M$ ou encore :

$$b_{2k}(f) \leq ((2k)(2M))^{2k}.$$

Soit maintenant $k \in \mathbb{N}$. et montrons que $\frac{b_{2k+1}(f)^{\frac{1}{2k+1}}}{2k+1} \leq 2M$ ou $b_{2k+1}(f) \leq (((2k+1)(2M))^{2k+1}$.
En effet, d'après le **13)**, $b_{2k+1}(f) \leq a_{2k}(f)^{\frac{1}{2}}.a_{2k+2}(f)^{\frac{1}{2}}$. mais par hypothèse

$$\begin{cases} a_{2k}(f)^{\frac{1}{2}} \leq \left(2kM)\right)^{2k}\right)^{\frac{1}{2}} \\ a_{2k+2}(f)^{\frac{1}{2}} \leq \left((2k+2)M)\right)^{2k+2}\right)^{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

donc $b_{2k+1}(f) \leq ((2k)(M))^k.((2k+2)(M))^{k+1} = k^k(k+1)^{k+1}(2M)^{2k+1}$. Or $k^k(k+1)^{k+1} \leq (2k+1)^k.(2k+1)^{k+1} = (2k+1)^{2k+1}$, d'où

$$b_{2k+1}(f) \leq (2k+1)^{2k+1}(2M)^{2k+1} = (((2k+1)(2M))^{2k+1}$$

. D'où linégalité demandée.

15. Soit $x, h \in \mathbb{R}$ et $n \geq 1$.Comme f admet des moments de tous ordres, alors d'après le **1)**, la fonction Φ_f admet des dérivées succssives à tout ordre et donc d'après l'inégalité de Taylore Lagrange appliquée à cette fonction entre x et $x+h$ à l'ordre $n-1$,

$$\left|\Phi_f(x+h) - \sum \frac{h^m}{m!}.\Phi_f^{(m)}(x)\right| \leq \frac{|h|^n}{n!}.\sup_{t\in J}\left|\Phi_f^{(n)}(t)\right|$$

où J est le segment d'extrimités x et $x+h$. Mais toujours d'après le **1) :**

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \Phi_f^{(n)}(t) = \int_{\mathbb{R}} (ix)^n.e^{itx}.f(x).dx,$$

donc pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\left|\Phi_f^{(n)}(t)\right| \leq \int_{\mathbb{R}} |x|^n .f(x).dx = b_n(f)$, en particulier $\sup\limits_{t\in J} \left|\Phi_f^{(n)}(t)\right| \leq b_n(f)$ et par suite

$$\left|\Phi_f(x+h) - \sum_{m=0}^{n-1} \frac{h^m}{m!}.\Phi_f^{(m)}(x)\right| \leq \frac{|h|^n}{n!}.b_n(f).$$

D'où l'inégalité demandée.

16. Soit $x \in \mathbb{R}$. Nous avons, d'après le **14) :** $\forall n \geq 1$, $b_n(f) \leq (2Mn)^n$, donc

$$\forall h \in \mathbb{R},\ \forall n \geq 1, \quad 0 \leq \frac{|h|^n}{n!} b_n(f) \leq \frac{|h|^n}{n!}(2Mn)^n \qquad (*).$$

D'autre part, d'après la formule de Stirling $\frac{|h|^n}{n!}(2Mn)^n \sim \frac{(2M|h|e)^n}{\sqrt{2\pi}\sqrt{n}}$ et cette dernière suite converge vers 0 si $2M\,|h|\,e < 1$ ou $|h| < \frac{1}{2Me}$. Et compte tenue de l'inégalité (*), on a :

$$\forall h,\ |h| < \frac{1}{2Me}, \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{|h|^n}{n!} b_n(f) = 0.$$

Or d'après la question précédente nous avons

$$\forall h \in \mathbb{R},\ \ \forall n \geq 1, \quad \left|\Phi_f(x+h) - \sum_{m=0}^{n-1} \frac{h^m}{m!}.\Phi_f^{(m)}(x)\right| \leq \frac{|h|^n}{n!}.b_n(f),$$

donc $\forall h$, $|h|\,\langle \frac{1}{2Me}$, $\forall\ n \geq 1$, $\left|\Phi_f(x+h) - \sum\limits_{m=0}^{n-1} \frac{h^m}{m!}.\Phi_f^{(m)}(x)\right| \leq \frac{|h|^n}{n!}.b_n(f)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{|h|^n}{n!} b_n(f) = 0$, d'où par passage à la limite $(n \to +\infty)$, on obtient :

$$\forall h, |h|\,\langle \frac{1}{2Me}, \Phi_f(x+h) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{h^m}{m!}.\Phi_f^{(m)}(x).$$

On a donc montré que pour tout réel x et pour tout h tel que $|h|\,\langle A$, $\Phi_f(x+h) = \sum\limits_{m=0}^{+\infty} \frac{h^m}{m!}.\Phi_f^{(m)}(x)$, où on a posé $A = \frac{1}{2Me}$.

17. Procédons par récurrence et notons pour tout $l \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(l)$, la propriété suivante : (Si g est un élément de E et admet des moments de tous ordres et $\forall k \in \mathbb{N}$, $a_k(f) = a_k(g)$. Alors

$$\forall x \in [-\frac{lA}{2}, \frac{lA}{2}], \Phi_f(x) = \Phi_g(x))$$

- Soit g un élément de E qui admet des moments de tous ordres et verifiant :

$$\forall k \in \mathbb{N}, a_k(f) = a_k(g).$$

On a en particulier $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = \int_{\mathbb{R}} g(x)dx$, donc $\Phi_f(0) = \Phi_g(0)$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

- Soit maintenant $l \in \mathbb{N}$ et supposons la propriété $\mathcal{P}(l)$ vraie et soit g un élément de E qui admet des moments de tous ordres et verifiant :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad a_k(f) = a_k(g).$$

Mais la fonction f vérifie la condition (U), donc la fonction g aussi (et pour le même M), donc d'après la question **16),** il existe $A\rangle 0$, tel que pour tout réel x et pour tout h tel que

$$|h| < A, \qquad \left\{\begin{array}{l} \Phi_f(x+h) = \sum\limits_{m=0}^{+\infty} \frac{h^m}{m!}.\Phi_f^{(m)}(x) \\ \Phi_g(x+h) = \sum\limits_{m=0}^{+\infty} \frac{h^m}{m!}.\Phi_g^{(m)}(x) \end{array}\right. \qquad (**).$$

Soit maintenant $y \in [-\frac{(l+1)A}{2}, \frac{(l+1)A}{2}]$, alors il existe $(x,h) \in [-\frac{lA}{2}, \frac{lA}{2}] \times [-\frac{A}{2}, \frac{A}{2}]$ tel que $y = x+h$, donc d'après (**)

$$\left\{\begin{array}{l} \Phi_f(x+h) = \sum\limits_{m=0}^{+\infty} \frac{h^m}{m!}.\Phi_f^{(m)}(x) \\ \Phi_g(x+h) = \sum\limits_{m=0}^{+\infty} \frac{h^m}{m!}.\Phi_g^{(m)}(x) \end{array}\right.$$

mais par hypothèse de récurrence, nous avons $\Phi_f = \Phi_g$ sur $[-\frac{lA}{2}, \frac{lA}{2}]$, donc $\forall m \in \mathbb{N}$, $\Phi_f^{(m)} = \Phi_g^{(m)}$ sur $[-\frac{lA}{2}, \frac{lA}{2}]$, en particulier, nous avons

$$\forall m \in \mathbb{N}, \Phi_f^{(m)}(x) = \Phi_g^{(m)}(x),$$

et compte tenue de ce qui précède, on obtient $\Phi_f(x+h) = \Phi_g(x+h)$ ou encore $\Phi_f(y) = \Phi_g(y)$. Par suite $\Phi_f = \Phi_g$ sur $[-\frac{(l+1)A}{2}, \frac{(l+1)A}{2}]$. Ce qui montre donc que la propriété $\mathcal{P}(l+1)$ est vraie. On conclue alors que pour tout $l \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(l)$ est vraie ou encore : pour tout $l \in \mathbb{N}$ et toute fonction g de E admettant des moments de tous ordres tels que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_k(f) = a_k(g)$, alors $\Phi_f(x) = \Phi_g(x)$ pour tout $x \in [-\frac{lA}{2}, \frac{lA}{2}]$.

18. On conclue d'après la question précédente et du fait que les segments $([-\frac{lA}{2}, \frac{lA}{2}])_{l\in\mathbb{N}}$ recouvrent $\mathbb{R}$, que si g est une fonction de E admettant des moments de tous ordres et verifie : $\forall k \in \mathbb{N}$, $a_k(f) = a_k(g)$, alors $\Phi_f(x) = \Phi_g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et par le **9) :** $f = g$

19. Soit $f \in E$, admettant des moments de tous ordre et vérifiant

$$\forall k \geq 1, \begin{cases} a_{2k}(f) = (2k-1)a_{2k-2}(f) \\ a_{2k-1}(f) = 0 \end{cases}.$$

Comme $a_0(f) = 1$, alors par une simple récurrence, on montre que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} a_{2n}(f) = \frac{(2n)!}{2^n.n!} \\ a_{2n+1}(f) = 0 \end{cases}$ (**).

D'autre part,

$$\forall n \geq 1,\ \ 0 \leq \frac{1}{2n}.\quad (a_{2n}(f))^{\frac{1}{2n}} = \frac{1}{2n}.\left(\frac{(2n)!}{2^n.n!}\right)^{\frac{1}{2n}} = \frac{1}{2n}.(1.3.....(2n-1))^{\frac{1}{2n}} \leq \frac{1}{2n}.((2n-1)^n)^{\frac{1}{2n}} = \frac{1}{2n}.(2n-1)^{\frac{1}{2}}.$$

Donc la suite $(\frac{1}{2n}.(a_{2n}(f))^{\frac{1}{2n}})_{n\geq 1}$ converge vers 0. Elle est donc bornée.

Donc d'après le **16.**, il existe $A\rangle 0$, tel que $\Phi_f(x+h) = \sum\limits_{m=0}^{+\infty} \frac{h^m}{m!}.\Phi_f^{(m)}(x)$ pour tout réel x et pour tout h tel que $|h|\,\langle A$, en particulier :

$$\Phi_f(h) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{h^m}{m!}.\Phi_f^{(m)}(0),\ \text{pour tout } h \text{ tel que } \ |h|\,\langle A.$$

Mais d'après le **1)**, $\Phi_f^{(m)}(0) = i^m.a_m(f)$. Donc compte tenue de laformule (**), on peut écrire $\Phi_f(h) = \sum\limits_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m h^{2m}}{2^m.m!}$pour tout h tel que $|h|\,\langle A$. Or $\sum\limits_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m h^{2m}}{2^m.m!} = e^{-\frac{h^2}{2}}$. D'où $\Phi_f(h) = e^{-\frac{h^2}{2}}$, pour tout h tel que $|h|\,\langle A$

D'autre part, d'après le resultat admis dans l'enoncé, $\int_{\mathbb{R}} e^{ihx}.(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}})dx = e^{-\frac{h^2}{2}}$ pour tout h, ou encore $\Phi_g(h) = e^{-\frac{h^2}{2}}$ où on a posé $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ pour tout x réel. On a donc $\forall h$, tel que $|h|\,\langle A$, $\Phi_f(h) = \Phi_g(h)$. Donc $\forall k$, $\Phi_f^k(0) = \Phi_g^k(0)$ ou encore $\forall k$, $a_k(f) = a_k(g)$, donc d'après le **18),** $f = g$.

Réciproquement, la fonction g si dessus est élément de E et si $k \geq 1$, alors la fonction $x \to x^{2k}.\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et $a_{2k}(g) = \int_{\mathbb{R}} x^{2k}.\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} x^{2k-1}.(-x.e^{-\frac{x^2}{2}})dx$, et par intégration par partie :

$$\int_{\mathbb{R}} x^{2k-1}.(-xe^{-\frac{x^2}{2}})dx = [x^{2k-1}.e^{-\frac{x^2}{2}}]_{-\infty}^{+\infty} - (2k-1)\int_{\mathbb{R}} x^{2k-2}.e^{-\frac{x^2}{2}}dx.$$

Or $\lim\limits_{|x|\to+\infty} x^{2k-1}.e^{-\frac{x^2}{2}} = 0$, d'où

$$\int_{\mathbb{R}} x^{2k-1}.(-\frac{x}{2}.e^{-\frac{x^2}{2}})dx = -(2k-1)\int_{\mathbb{R}} x^{2k-2}.e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

et par suite $a_{2k}(g) = (2k-1).a_{2k-2}(g)$. D'autre part, $a_{2k-1}(g) = \int_{\mathbb{R}} x^{2k-1}.\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx = 0$, puisque la fonction sous l'intégrale est impaire. Donc g est solution du système.

Finalement la seule solution du système proposé est la fonction $x \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$