Optimisation d'une aire dans un tétraèdre

Sommaire (liens internes au document) :

1 Fiche résumé

Titre – Optimisation d'une aire dans un tétraèdre.

Niveau – Classes de seconde, première s (et éventuellement terminale S).

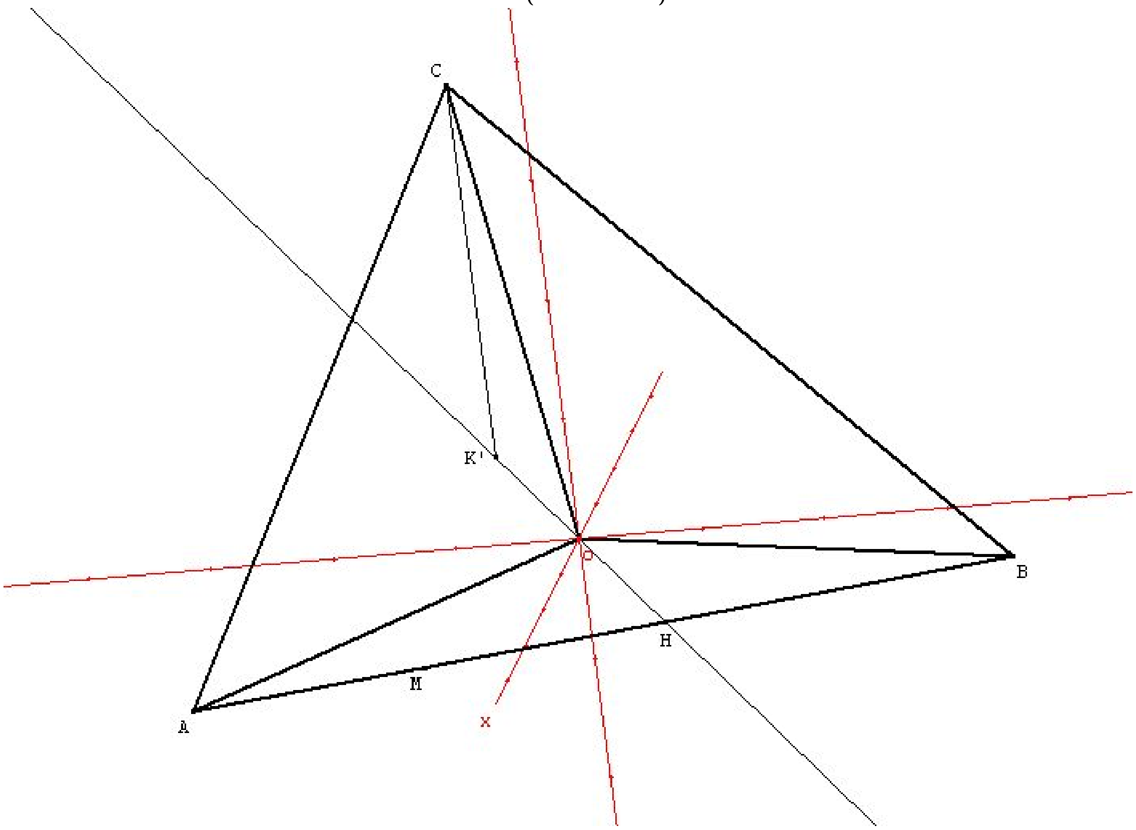
Domaine – Géométrie de l'espace.

Durée – 1h.

2 Fiche professeur

2.1 Analyse mathématique

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.



O est l'origine du repère, A et B sont deux points du plan $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$. Notons H le projeté orthogonal de O sur (AB) et C un point quelconque du plan $\left(O; \overrightarrow{OH}, \vec{k}\right)$.

Un point M est mobile sur la droite (AB). On demande la position du point M sur $[AB]$ correspondant à une aire minimale du triangle OMC.

Éléments de résolution Notons K le projeté orthogonal de C sur (OM) et K' le projeté orthogonal de C sur (OH).

L'aire du triangle OMC est $\mathscr{S} = \dfrac{1}{2} \times CK \times OM$.

Comme (AB) est orthogonale à (OH) et à $\vec{k}$, le plan $\left(O; \overrightarrow{OH}, \vec{k}\right)$ est orthogonal à (AB). (CK') est donc orthogonale à (OH) et à (AB) : K' est donc le projeté orthogonal de C sur le plan (OAB). On a donc $CK' \leqslant CK$ pour toute position du point M.

Comme on a également $OH \leqslant OM$ pour toute position de M, on en déduit que l'on a pour toute position de M :

$$\frac{1}{2} \times OK' \times OH \leqslant \frac{1}{2} \times OK \times OM$$

L'aire du triangle est donc minimale lorsque M est en H.

2.2 Objectifs

2.2.1 Mathématiques

- Travailler la vision dans l'espace.
- Orthogonalité dans l'espace.
- Aire d'un triangle.
- Notion de distance d'un point à un plan ou à une droite.
- Pour établir les conjectures, les élèves pourront être amenés à étudier la figure dans un plan. On travaille ainsi une compétence importante en géométrie 3D : savoir ramener certaines situations à un problème plan.

2.2.2 Logiciels

Manipulation d'un logiciel de géométrie 3D : construction de solides de l'espace, visualisation dans un plan particulier, constructions de point (point libre, point libre sur, point repéré), mesure et affichage (de longueurs, d'aires).

2.3 Scénarios

- La version 1 est destinée à une classe de seconde. Le point C est pris sur l'axe $(O; \vec{k})$ afin de simplifier la démonstration.

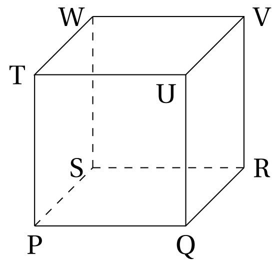
  Prérequis mathématiques : avoir terminé le chapitre « géométrie dans l'espace » et effectué deux ou trois exercices sur l'orthogonalité.

  Prérequis TICE : aucune manipulation préalable par les élèves ni sous géoplan, ni sous géospace, cependant, il semble important qu'au préalable le professeur ait utilisé brièvement géospace en vidéo-projection. Par exemple à l'occasion de la correction d'un exercice, sur une figure construite à l'avance, montrer rapidement comment placer un point libre, le déplacer, tracer un segment.
- La version 2 concerne les élèves de première S. Les coordonnées des points sont fixées ce qui permet d'éventuelles démarches variées (essais de calculs, produit scalaire...) dans la recherche d'une démonstration.

3 Fiches élève

3.1 Énoncé 1 (seconde)

La situation $PQRSTUVW$ est un cube.



A et B sont deux points du plan (PQR) tels que la droite (AB) ne passe pas par S. C est un point de la droite (SW).
M un point mobile de la droite (AB).
Il s'agit de déterminer la position du point M telle que l'aire du triangle SMC soit minimale.

Conjecture Établir des conjectures à l'aide d'un logiciel de géométrie dans l'espace.

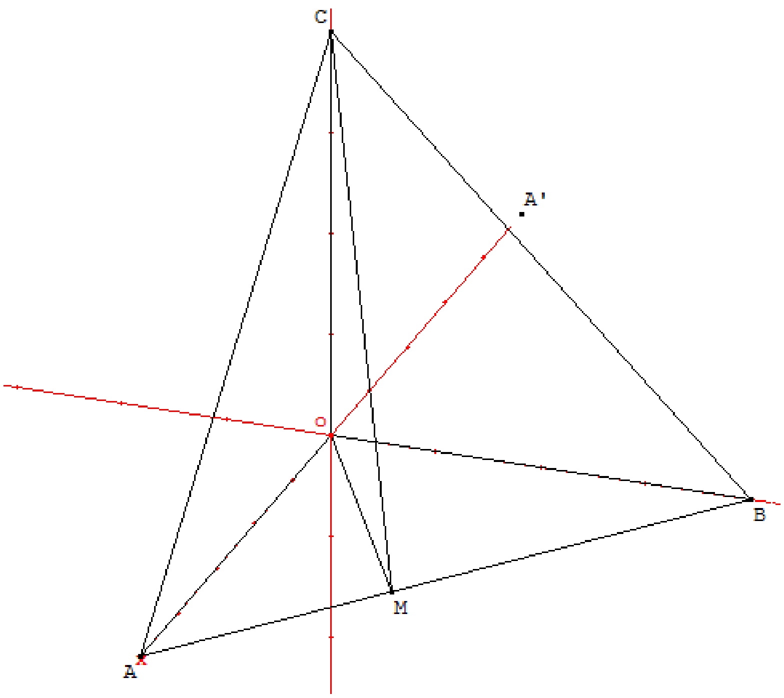
Démonstration Démontrer la conjecture.

3.2 Énoncé pour la classe de seconde, version bis (testée en classe)

Il s'agit de déterminer la position du point M sur le segment $[AB]$ pour que l'aire du triangle oCM soit minimale (voir figure ci-dessous). (ox), (oy) et (oz) sont trois droites concourantes en o et de plus, elles sont perpendiculaires deux à deux . A est le point de (ox) d'abscisse 5, B le point de (oy) d'abscisse 4 et C le point de (oz) d'abscisse 4, et M est un point « libre » sur le segment $[AB]$.

1. Construire une figure avec le logiciel géospace. Émettre une conjecture sur la position de M qui permet d'obtenir l'aire minimale. Émettre une conjecture sur la position relative de la droite (oC) et du plan (oAB).

2. Démontrer la propriété conjecturée sur la position de (oC) et de (oAB). Exprimer l'aire du triangle oMC en fonction de OM, en déduire la position de M pour que l'aire du triangle soit minimale.



Aide pour une première utilisation du logiciel géospace.

- Afficher le repère avec les droites (ox), (oy) et (oz) (voir le bouton qui représente le repère).
- Le menu « créer » va permettre d'effectuer toutes les constructions.
- Placer A : « point (repéré) libre » / (« sur une droite ») « dans un plan » etc. Terminer la construction de la figure.
- Créer puis afficher la variable « aire du triangle », pour cela utiliser dans le menu « créer » :
  - numérique / calcul géométrique / aire d'un triangle
  - puis affichage / variable numérique déjà créée
- Un clic gauche sur le point M permet de le déplacer. Un clic droit sur la feuille de dessin permet d'obtenir la figure sous différents points de vue, on peut aussi utiliser le menu « vues ».
- Remarques :
  - Avec le bouton « RAP » (rappel) en dessous du bouton « créer », on peut afficher les noms des objets créés.
  - Le menu « divers »/ « supprimer » pourra être utile parfois.

3.3 Énoncé 2 (première S)

La situation L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.
On considère les points $A(5;0;0)$, $B(0;10;0)$ et $C(2;1;5)$.
Soit par ailleurs M un point du segment $[AB]$.
Il s'agit de déterminer la position du point M telle que l'aire du triangle OMC soit minimale et de déterminer cette aire.

Conjecture Établir des conjectures à l'aide d'un logiciel de géométrie dans l'espace.

Démonstration Démontrer les conjectures (faire le calcul exact de l'aire minimale).

4 Expérimentation en classe pour la version classe de seconde

Une première mouture a été testée lors de la première séance de mathématique avec des TICE en septembre, et cela a conduit à modifier la fiche élève. Pour l'aspect TICE en donnant quelques indications supplémentaires à propos du logiciel pour « supprimer » et pour obtenir différentes « vues ». Ceci pour éviter au professeur d'avoir à donner ces explications oralement. Majoritairement les élèves ont mis une heure pour construire la figure, une exception pour une élève qui a terminé au bout d'une demi-heure. Pour l'aspect mathématique, la démonstration est plus guidée pour l'utilisation de propriétés liées à l'orthogonalité dans l'espace, ce qui est un point délicat en particulier en classe de seconde.