Préparation à l'agrégation interne de mathématiques - Année 2011
Polynômes et fractions rationnelles - Mercredi 29 juin 2011

1 Les polynômes

Exercice 1.1.

1. *Démontrer que les polynômes inversibles sont les polynômes constants non nuls.*
2. *Démontrer que les polynômes de degré 1 sont irréductibles.*

Exercice 1.2. *Division euclidienne dans* $\mathbb{R}[X]$ *de* $X^4 - 2X^3 - X^2 + X - 1$ *par* $X^2 + X + 1$.

Exercice 1.3. *Soient* A *et* B *deux polynômes à coefficients dans* $\mathbb{Q}$. *Justifier à l'aide du théorème de Bézout que leur PGCD (respectivement le fait qu'ils soient premiers entre eux) ne change pas si on les considère comme polynômes à coefficients dans* $\mathbb{R}$ *ou dans* $\mathbb{C}$.

Exercice 1.4. *Divisibilité et polynôme dérivé.*

1. *Si* $P \mid Q$, *a-t-on* $P' \mid Q'$ *? Et la réciproque ?*
2. *Soient* P *et* Q *deux polynômes appartenant à* $\mathbb{K}[X]$ *et* n *un entier naturel non nul. Montrer que*
$$P^n \mid Q \underset{\not\Leftarrow}{\overset{\Rightarrow}{}} P^{n-1} \mid Q'.$$
3. *Soient* P *et* Q *deux polynômes à coefficients dans un corps* $\mathbb{K}$ *de caractéristique nulle et* n *un entier naturel non nul. Démontrer que, si* P *est irréductible :*
$$P^n|Q \text{ et } P^n|Q' \Longleftrightarrow P^{n+1}|Q.$$
(Contre-exemple sur $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ *:* $Q = X^3 + X^2$, $P = X$ *et* $n = 2$.*)*

Exercice 1.5. $\mathbb{K}[X]$ *est principal car euclidien.*
On appelle idéal *de* $\mathbb{K}[X]$ *tout sous-ensemble* I *de* $\mathbb{K}[X]$ *stable par addition et par multiplication par un élément de* $\mathbb{K}[X]$ *:*
$$[A, B \in I \Rightarrow A + B \in I] \text{ et } [A \in I,\ P \in \mathbb{K}[X] \Rightarrow AP \in I].$$
À l'aide d'une division euclidienne, démontrer que pour tout idéal I *de* $\mathbb{K}[X]$, *il existe un polynôme* P *dans* I *tel que* $I = \{PQ : Q \in \mathbb{K}[X]\}$.

2 Fonctions polynomiales et racines

Exercice 2.1. *Déterminer, en utilisant le schéma de Hörner, la valeur en 2 du polynôme*
$$P = 3X^5 - 4X^4 + 3X^3 - 10X^2 - 5X + 4.$$

Exercice 2.2. *Idéaux de polynômes.*

1. *Soit* Δ *un sous-ensemble fini de* $\mathbb{K}$. *Vérifier que l'ensemble* I_Δ *des polynômes* P *de* $\mathbb{K}[X]$ *vérifiant* $\tilde{P}(x) = 0$ *pour tout* x *dans* Δ *est un idéal de* $\mathbb{K}[X]$.
2. *Si le corps* $\mathbb{K}$ *est fini et* $\Delta = \mathbb{K}$, *quel est l'idéal associé* $I_\mathbb{K}$ *?*
Si $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, *déterminer un générateur de cet idéal.*

Exercice 2.3. *Soit* $P = X^4 - 2X^3 - 11X^2 + 12X + 36$.
Sachant que P *a deux racines multiples, factoriser* P *sur* $\mathbb{R}$.

Exercice 2.4. *Soit* $P = X^4 + 2X^3 + 7X^2 + 8X + 12$.
Sachant que P *a une racine imaginaire pure, factoriser* P *sur* $\mathbb{C}$.

Exercice 2.5. *Soient* $P = X^6 + 1$ *et* $\omega = e^{i\frac{\pi}{6}}$.
Calculer $P(\omega)$, $P(\omega^3)$ *et* $P(\omega^5)$ *puis en déduire la factorisation de* P *dans* $\mathbb{C}[X]$ *puis dans* $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 2.6. *Influence du corps de base.*
Trouver un polynôme qui est un contre-exemple à la propriété 2.3 si $\mathbb{R}$ *est remplacé par* $\mathbb{Q}$.

Exercice 2.7. *Racines et divisibilité.*

1. *Toute racine réelle du polynôme* $P = X(1+X^2)$ *est racine du polynôme* $Q = X(2+X^2)$. *Peut-on en déduire que* P *divise* Q *dans* $\mathbb{R}[X]$ *?*
2. *Démontrer que, pour tout entier* $n \geqslant 1$, *le polynôme* $X^2 - 3X + 2$ *divise dans* $\mathbb{R}[X]$ *le polynôme* $P_n = (X-2)^{2n} + (X-1)^n - 1$.

Exercice 2.8. 1. *Déterminer tous les polynômes* Q *de* $\mathbb{C}[X]$ *vérifiant* $Q(X^2) = (X+1)Q(X)$.

2. *En déduire tous les polynômes* P *de* $\mathbb{C}[X]$ *vérifiant* $P(X^2) = (X^2+1)P(X)$.

Exercice 2.9. *Déterminer les polynômes* P *de* $\mathbb{C}[X]$ *de degré* 5 *vérifiant :*

$$(X-1)^3 \text{ divise } P(X)+1 \qquad \text{et} \qquad (X+1)^3 \text{ divise } P(X)-1.$$

Exercice 2.10. *Soient* $n \geqslant 2$ *un entier. Démontrer que le polynôme* $P_n = X^n - X + 1$ *n'a que des racines simples sur* $\mathbb{C}$.

Exercice 2.11. *Déterminer le nombre complexe* k *de sorte que le polynôme* $2X^3 - X^2 - 7X + k$ *ait deux racines de somme* 1. *Les déterminer (sur* $\mathbb{C}$*).*

Exercice 2.12. *Résolution, sur* $\mathbb{C}$, *du système* $\begin{cases} x+y+z=1 \\ xy+yz+xz=-2 \\ x^3+y^3+z^3=7 \end{cases}$

Exercice 2.13. *(théorème des deux carrés dans* $\mathbb{R}[X]$*)*
Soit P *appartenant à* $\mathbb{R}[X]$ *et tel que* $P(x) > 0$ *pour tout réel* x.

1. *À l'aide de la décomposition de* P *en facteurs irréductibles dans* $\mathbb{C}[X]$, *démontrer qu'il existe un polynôme* Q *dans* $C[X]$ *tel que* $P = Q.\overline{Q}$ *(*$\overline{Q}$ *désigne le polynôme obtenu de* Q *par conjugaison de ses coefficients).*
2. *À l'aide du polynôme* Q, *démontrer qu'il existe deux polynômes* A *et* B *dans* $\mathbb{R}[X]$ *tels que* $P = A^2 + B^2$.
3. *Étendre ce résultat aux polynômes réels positifs ou nuls sur* $\mathbb{R}$.

3 Fractions rationnelles et décomposition en éléments simples

Exercice 3.1. *Décomposer en éléments simples sur* $\mathbb{C}$ *et sur* $\mathbb{R}$ *la fraction rationnelle*

$$F = \frac{X-2}{X^3+1}.$$

Exercice 3.2. *Décomposer en éléments simples sur* $\mathbb{R}$ *la fraction rationnelle*

$$F = \frac{X^4 - 5X^3 + 10X^2 - 8X - 1}{(X-1)^3(X-2)}.$$

Exercice 3.3. *Montrer que si le quotient* $F = \frac{P}{Q}$ *de deux éléments de* $\mathbb{C}[X]$ *appartient à* $\mathbb{Q}(X)$, *alors il existe* A *et* B *dans* $\mathbb{Q}[X]$ *et* D *dans* $\mathbb{C}[X]$ *tels que* $P = AD$ *et* $Q = BD$ *(donc* $F = \frac{A}{B}$*).*

Exercice 3.4. *Irrationnalité de l'exponentielle et du logarithme sur* $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$.

1. *Montrer qu'il n'existe aucune fraction rationnelle non nulle vérifiant* $F' = F$.
2. *Montrer qu'il n'existe aucune fraction rationnelle vérifiant* $F' = \frac{1}{X}$.
   (On pourra raisonner par l'absurde et montrer que, pour tout entier naturel n, X^n *divise le dénominateur de* F.*)*

Préparation à l'agrégation interne de mathématiques - Année 2011
Polynômes et fractions rationnelles - Résumé de résultats - Mercredi 29 juin 2011

Je renvoie aux livres [Mon06] et [Gou94] pour plus de détails et de démonstrations.

1 Les polynômes

Dans toute la suite, $\mathbb{K}$ désignera un corps (commutatif). Penser à

$$\begin{cases} \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{Q} \text{ de caractéristique } 0 : & k \times 1 = 0 \Leftrightarrow k = 0 \\ \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \text{ de caractéristique } p \ (p \text{ premier}) : & k \times 1 = 0 \Leftrightarrow k \in p\mathbb{Z} \end{cases}$$

Une liste de définitions/vocabulaires :

1. Un *polynôme* P à coefficients dans $\mathbb{K}$ est une « suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ indexée sur $\mathbb{N}$ d'éléments de $\mathbb{K}$ tous nuls sauf un nombre fini » (les *coefficients* de P). Plus habituellement, on note
$$P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k = a_d X^d + \ldots + a_1 X + a_0.$$
2. Si P n'est pas nul, son *degré* $deg(P)$ est le plus grand entier d tel que $a_d \neq 0$.
On convient que $deg(0) = -\infty$.
3. Un *monôme* est un polynôme dont au plus un des coefficients est non nul.
4. Un polynôme est *unitaire* si son coefficient $a_{deg(P)}$ de plus haut degré est égal à 1.
5. La somme, la différence, le produit de deux polynômes, le produit d'un polynôme par un élément de $\mathbb{K}$ ont un sens naturel et possèdent les propriétés requises (commutativité, associativité, distributivité, ...) pour que l'ensemble $\mathbb{K}[X]$ des polynômes soit muni d'une structure d'anneau, de $\mathbb{K}$-espace vectoriel et de $\mathbb{K}$-algèbre.
6. La composition de deux polynômes a également un sens et n'est pas commutative.

Propriété 1.1 (du degré)**.** *Pour tous polynômes P et Q (si nul(s) : arithmétique dans $\mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$) :*

1. *$deg(P \pm Q) \leqslant \max(deg(P); deg(Q))$ (avec égalité si $deg(P) \neq deg(Q)$)*
2. *$deg(PQ) = deg(P) + deg(Q)$ (donc $deg(\lambda P) = deg(P)$ si $\lambda \in \mathbb{K}^*$)*
3. *Conséquence : si $P|Q$ alors $deg(P) \leqslant deg(Q)$*
4. *Conséquence : les polynômes inversibles de $\mathbb{K}[X]$ sont les polynômes constants non nuls*

Définition 1.1. *Un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ est* irréductible *(ou* premier*) sur $\mathbb{K}$ si les seuls diviseurs de P sont les constantes (les inversibles) ou les λP, $\lambda \in \mathbb{K}^*$.*

Tout comme $\mathbb{Z}$, l'anneau $\mathbb{K}[X]$ est muni d'une division euclidienne :

Théorème 1.1 (division euclidienne dans l'anneau des polynômes sur $\mathbb{K}$)**.**
Pour tous polynômes A et B, B non nul, il existe un unique couple $(Q; R)$ de polynômes vérifiant :

$$A = BQ + R \text{ et } deg(R) < deg(B).$$

Les notions de $PGCD$, $PPCM$ (polynômes **unitaires**), de décomposition en facteurs irréductibles, les théorèmes de Bézout, de Gauss sont encore valables sur $\mathbb{K}[X]$.

Définition 1.2 (dérivation)**.** *Le* polynôme dérivé *de $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k = a_d X^d + \ldots + a_1 X + a_0$ est le polynôme $P' = \sum_{k=1}^{d} k a_k X^{k-1} = d a_d X^{d-1} + \ldots + a_1$.*
On définit par récurrence le polynôme dérivé $P^{(n)} = \left(P^{(n-1)}\right)'$.

Propriété 1.2.
1. *$deg(P') \leqslant deg(P) - 1$ si $P \neq 0$ (avec égalité si $deg(P) \neq 0$ dans $\mathbb{K}$)*
2. *$(P \pm Q)' = P' \pm Q'$; $(\lambda P)' = \lambda P'$; $(PQ)' = P'Q + PQ'$.*
3. *Formule de Leibniz : $(PQ)^{(k)} = \sum_{i=O}^{k} \binom{k}{i} P^{(i)} Q^{(k-i)}$*

2 Fonctions polynomiales et racines

Si P appartient à $\mathbb{K}[X]$, on peut l'*évaluer* en tout nombre x de $\mathbb{K}$. On associe à P la *fonction polynomiale* $\tilde{P}$:

$$\tilde{P} : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K} : x \longmapsto \sum_{k=0}^{d} a_k x^k = a_d x^d + \ldots + a_1 x + a_0$$

Théorème 2.1 (racine et multiplicité)**.** *Soient P appartenant à $\mathbb{K}[X]$ et a un élément de $\mathbb{K}$.*

1. ***racine** :*

$$\tilde{P}(a) = 0 \Longleftrightarrow X - a \mid P \text{ (dans } \mathbb{K}[X])$$

2. ***racine de multiplicité** $\alpha \geqslant 1$:*

$$P = (X-a)^{\alpha} Q \text{ et } \tilde{Q}(a) \neq 0 \Longleftrightarrow (X-a)^{\alpha} | P \text{ et } (X-a)^{\alpha+1} \nmid P \text{ (dans } \mathbb{K}[X])$$

3. *(avec Gauss) $a_1, \ldots, a_r$ (appartenant à $\mathbb{K}$) sont r racines distinctes de multiplicité respective $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ si et seulement si $(X-a_1)^{\alpha_1} \ldots (X-a_r)^{\alpha_r}$ divise P dans $\mathbb{K}[X]$.*

La troisième équivalence permet de majorer le nombre de racines (comptées avec multiplicités) par le degré : $\alpha_1 + \ldots + \alpha_r \leqslant deg(P)$.

Attention : si $P = X^p - X$ dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[X]$, alors la fonction associée est identiquement nulle sur $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (c'est le petit théorème de Fermat).

On peut identifier polynôme et fonction polynomiale sur $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ en vertu de la

Propriété 2.1. *L'application $\mathbb{K}[X] \longrightarrow \mathbb{K}^{\mathbb{K}} : P \longmapsto \tilde{P}$ est injective si et seulement si $\mathbb{K}$ est infini.*

Propriété 2.2. *Le corps $\mathbb{K}$ est ici supposé de **caractéristique nulle** (donc infini).*
Soient P appartenant à $\mathbb{K}[X]$ et un élement a de $\mathbb{K}$.

1. ***Formule de Taylor :***

$$P = \sum_{k=0}^{deg(P)} P^{(k)}(a) \frac{(X-a)^k}{k!}.$$

2. *Le nombre a est racine de P de multiplicité α si et seulement si*

$$P(a) = \ldots = P^{(\alpha-1)}(a) = 0 \text{ et } P^{(\alpha)}(a) \neq 0.$$

Propriété 2.3. *Sur $\mathbb{R}$ et/ou $\mathbb{C}$:*

1. *(d'Alembert-Gauss) Tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ de degré au moins 1 admet une racine dans $\mathbb{C}$.*
2. *Les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont les polynômes de degré 1.*
3. *Si P et Q appartiennent à $\mathbb{C}[X]$, alors P divise Q si et seulement si toute racine de P de multiplicité k est racine de Q de multiplicité au moins k.*
4. *Tout polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré impair admet une racine dans $\mathbb{R}$.*
5. *Les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 sans racine réelle.*

Définition 2.1. *Les* fonctions symétriques élémentaires *en les n variables $x_1, \ldots, x_n$ sont les n expressions (« somme des produits de k variables distinctes »)*

$$\sigma_k = \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} x_{i_1} \ldots x_{i_k} = x_1 x_2 \ldots x_k + \ldots + x_{n-k+1} \ldots x_n \quad \text{pour} \quad k = 1, \ldots, n.$$

$$\sigma_1 = x_1 + \ldots + x_n \quad ; \quad \sigma_2 = \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 \leqslant n} x_{i_1} x_{i_2} = x_1 x_2 + \ldots + x_{n-1} x_n \quad ; \quad \ldots \quad ; \quad \sigma_n = x_1 x_2 \ldots x_n$$

Propriété 2.4 (relations entre coefficients et racines)**.** *Soit P un polynôme de degré n dans $\mathbb{K}[X]$, supposé scindé sur $\mathbb{K}$, de racines $x_1, \ldots, x_n$ (comptées avec multiplicité) :*

$$P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k = a_n \prod_{k=1}^{n} (X - x_k).$$

Alors :

$$\sigma_1 = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \quad ; \quad \ldots \quad ; \quad \sigma_k = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n} \quad ; \quad \ldots \quad ; \quad \sigma_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}.$$

3 Fractions rationnelles et décomposition en éléments simples

L'ensemble $\mathbb{K}(X)$ des *fractions rationnelles* est défini à partir de $\mathbb{K}[X]$ de manière analogue à $\mathbb{Q}$ à partir de $\mathbb{Z}$: il s'agit du *corps des fractions*. Une fraction rationnelle est donc (la classe d'équivalence d') un élément de la forme $\frac{P}{Q}$ avec P et Q dans $\mathbb{K}[X]$ et Q non nul.

1. L'addition et le produit (usuels) de fractions munissent $\mathbb{K}(X)$ d'une structure de corps commutatif infini (quel que soit $\mathbb{K}$).
2. Le degré $deg\left(\frac{P}{Q}\right) = deg(P) - deg(Q)$ de la fraction rationnelle ne dépend pas du représentant.
3. Tout élément F de $\mathbb{K}(X)$ admet un *représentant irréductible* $\frac{P}{Q}$, P et Q premiers entre eux. Un tel couple $(P;Q)$ est unique à un multiple (scalaire) non nul près.
4. La dérivation des polynômes s'étend aux fractions rationnelles avec les formules usuelles.
5. On a $deg(F') \leqslant deg(F) - 1$ mais l'inégalité peut être stricte même en caractéristique nulle comme pour l'exemple $F = \frac{X}{X+1}$.

Définition 3.1 (zéros et pôles)**.** *Soit $F = \frac{P}{Q}$ un représentant irréductible.*

1. Un zéro *(d'ordre k) de F est une racine (d'ordre k) du numérateur P.*

2. Un pôle *(d'ordre k) de F est une racine (d'ordre k) du numérateur Q.*

Zéros et pôles ne dépendent pas du représentant irréductible choisi (mais bien sûr du corps $\mathbb{K}$). Zéros et pôles forment des ensembles finis (si $P \neq 0$) et disjoints car P et Q n'ont aucun facteur commun.

À toute fraction rationnelle F, on peut associer la *fonction rationnelle* $\tilde{F} : \mathbb{K}\backslash\mathcal{P} \longrightarrow \mathbb{K}$ définie sur le corps $\mathbb{K}$ privé de l'ensemble $\mathcal{P}$ des pôles de F.

Théorème 3.1 (décomposition en éléments simples)**.** *Soient $F = \frac{A}{B}$ un représentant irréductible d'une fraction rationnelle F sur $\mathbb{K}$ et $B = \lambda B_1^{\alpha_1} \dots B_r^{\alpha_r}$ la décomposition de B en produit de polynômes irréductibles, premiers entre eux et unitaires ($\lambda \in \mathbb{K}^*$, B_i irréductible unitaire, $PGCD(B_i;B_j) = 1$ si $i \neq j$ et $\alpha_i \in \mathbb{N}^*$). Alors, il existe une unique famille de polynômes notée E, C_{ik} telle que :*

$$F = \frac{A}{\lambda B_1^{\alpha_1} \dots B_r^{\alpha_r}} = E + \sum_{i=1}^{r} \left(\sum_{k=1}^{\alpha_i} \frac{C_{ik}}{(B_i)^k} \right) \quad et \quad deg(C_{ik}) < deg(B_i).$$

Le polynôme E est appelé *partie entière*, le reste $F - E$ est appelé *partie polaire*.

Sur les corps $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}$, la connaissance des polynômes irréductibles ($deg(B_i) = 1$, éventuellement 2) permet de préciser ce résultat.

Théorème 3.2. *Soient $F = A/B$ un représentant irréductible d'une fraction rationnelle F sur $\mathbb{K}$*

1. Sur $\mathbb{C}$: si $z_1, \dots, z_r$ sont les racines deux à deux distinctes de multiplicité respective $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ du dénominateur B, on a (avec unicité) :

$$F = \frac{A}{\lambda(X - z_1)^{\alpha_1} \dots (X - z_r)^{\alpha_r}} = E + \sum_{i=1}^{r} \left(\sum_{k=1}^{\alpha_i} \frac{a_{ik}}{(X - z_i)^k} \right)$$

où E appartient à $\mathbb{C}[X]$ et les a_{ik} sont des nombres complexes.

2. Sur $\mathbb{R}$: si $B = \lambda \prod_{i=1}^{r} (X - x_i)^{\alpha_i} \prod_{j=1}^{s} (X^2 + p_j X + q_j)^{\beta_j}$ est la décomposition de B sur $\mathbb{R}$, alors on a (avec unicité) :

$$F = E + \sum_{i=1}^{r} \left(\sum_{k=1}^{\alpha_i} \frac{a_{ik}}{(X - x_i)^k} \right) + \sum_{j=1}^{s} \left(\sum_{l=1}^{\beta_j} \frac{b_{jl} X + c_{jl}}{(X^2 + p_j X + q_j)^l} \right)$$

où E appartient à $\mathbb{R}[X]$ et les a_{ik}, b_{jl} et c_{jl} sont des nombres réels.

Références

[Gou94] Xavier Gourdon. *Algèbre.* Les maths en tête. Ellipses, Paris, 1994.

[Mon06] Jean-Marie Monier. *Algèbre MPSI, Cours, méthodes et exercices corrigés, 4^eédition.* J'intègre. Dunod, Paris, 2006.

Préparation à l'agrégation interne de mathématiques - Année 2011
Polynômes et fractions rationnelles - Éléments de correction

1 Les polynômes

Exercice 1.1.

1. *Si un polynôme P est inversible, alors il existe un polynôme Q tel que $PQ = 1$ d'où $deg(P) + deg(Q) = 0$ donc $deg(P) = 0$. La réciproque est évidente.*
2. *Si un polynôme P de degré 1 vérifie $P = QR$, alors $1 = deg(P) = deg(Q) + deg(R)$ donc Q (ou R) est de degré nul donc une constante non nulle.*

Exercice 1.2. $X^4 - 2X^3 - X^2 + X - 1 = (X^2 + X + 1)(X^2 - 3X + 1) + 3X - 2$

Exercice 1.3. *Notons $D = PGCD(A; B)$ (appartenant à $\mathbb{Q}[X]$). Il existe deux polynômes U et V dans $\mathbb{Q}[X]$ tels que $AU + BV = D$.*
Cette égalité pouvant être considérée sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, tout diviseur de A et B dans $\mathbb{K}[X]$ est donc un diviseur de D. Donc $D = PGCD(A; B)$ dans $\mathbb{K}[X]$.

Exercice 1.4. *Divisibilité et polynôme dérivé.*

1. *L'implication $P \mid Q \Rightarrow P' \mid Q'$ est fausse mais il faut au moins deux facteurs irréductibles dans P ; par exemple $P = X(X + 1)$ et $Q = X^2(X + 1)$ (en caractéristique différente de 2). La réciproque est fausse également (avec $Q = P + 1$ par exemple).*
2. – *Si $Q = P^nD$, alors $Q' = nP'P^{n-1}D + P^nD' = P^{n-1}(nP'D + PD')$.*
   – *Réciproque fausse ($P = X$ et $Q = X^n + 1$)*
3. *Si $P^n|Q$, alors $Q = P^nD$ donc $Q' = nP'P^{n-1}D+P^nD'$. Si, de plus $P^n|Q'$, alors $P^n|nP'P^{n-1}D$ donc $P|nP'D$ ou encore $P|P'D$. Puisque P est irréductible, le théorème de Gauss implique que $P|P'$ (impossible à cause du degré) ou $P|D$ c'est-à-dire $P^nP|Q$.*
   (Si P n'est pas irréductible, un contre-exemple est $P = X^2(X + 1)$, $Q = X^3(X + 1)^2$ avec $n = 1$.)

Exercice 1.5.
– *Si $I = \{0\}$ alors $P = 0$ convient.*
– *Si I contient un polynôme de degré 0 (une constante non nulle), alors $I = \mathbb{K}[X]$ et $P = 1$ convient.*
– *Si I est distinct de $\{0\}$ et $\mathbb{K}[X]$, alors I contient un polynôme P de degré minimal $d \geqslant 1$.*
Si A appartient à I, la division euclidienne de A par P s'écrit $A = PQ + R$ avec $deg(R) < d$. Le reste $R = A - PQ$ appartient à l'idéal I car A et P appartiennent à I donc $R = 0$. D'où la conclusion.

2 Fonctions polynomiales et racines

Exercice 2.1. *Écrivons P sous la forme $P = ((((3X - 4)\,X + 3)\,X - 10)\,X - 5)\,X + 4$ pour obtenir $P(2) = 10$ à l'aide de 5 multiplications et 5 additions.*

Exercice 2.2. *Idéaux de polynômes.*

1. *Vérification simple. Le fait que Δ soit fini ou non n'importe pas.*
2. *Si le corps $\mathbb{K}$ est fini et $\Delta = \mathbb{K}$, l'idéal associé $I_{\mathbb{K}}$ est l'ensemble des polynômes P dont la fonction associée $\tilde{P}$ est identiquement nulle sur $\mathbb{K}$.*
   Il s'agit en fait du noyau du morphisme (non injectif) de $\mathbb{K}$-algèbres $\mathbb{K}[X] \longrightarrow \mathbb{K}^{\mathbb{K}} : P \longmapsto \tilde{P}$.
   Si $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, un élement de $I_{\mathbb{K}}$ est un polynôme admettant pour racines tous les éléments $0, \ldots, p-1$ de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, c'est-à-dire un polynôme divisible par tous les facteurs $X, X-1, \ldots, X-(p-1)$ qui sont irréductibles et premiers entre eux donc par leur produit $\displaystyle\prod_{x\in\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} (X - x) = X^p - X$
   (l'égalité provenant de l'égalité des degrés).

Revisitons ce résultat à l'aide d'une matrice de Vandermonde :
Si $\Delta = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ est un sous-ensemble (ordonné) de $n+1$ éléments d'un corps $\mathbb{K}$ et $P = a_0 + a_1X + \ldots + a_nX^n$ un polynôme dans $\mathbb{K}[X]$, considérons les matrices M (carrée, de Vandermonde) et V (colonne) de taille $n+1$ suivantes

$$M = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \ldots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \ldots & x_n^n \end{pmatrix} \qquad V = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Le produit MV est la matrice colonne constituée des valeurs $\tilde{P}(x_0), \ldots, \tilde{P}(x_n)$.
Donc P appartient à I_Δ si et seulement si V appartient au noyau $\ker M$.
Puisque $\det M = \prod_{i<j}(x_j - x_i)$, l'existence d'un polynôme non nul de degré au plus n dans I_Δ est équivalente au fait que les éléments $x_0, \ldots, x_n$ de Δ ne sont pas distincts deux à deux.
Le corps $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ contient exactement p éléments distincts donc $\det M = 0$ dès que $n \geqslant p$. Il existe donc un polynôme de degré p (et c'est le minimum) dont la fonction associée est identiquement nulle sur $\mathbb{K}$.

Exercice 2.3. *Le polynôme unitaire $P = X^4 - 2X^3 - 11X^2 + 12X + 36$ s'écrit sous la forme $P = (X^2 + bX + c)^2$, b et c réels, s'il admet deux racines doubles (réelles ou non). En développant cette expression et en procédant par identification, on obtient $b = -1$ et $c = -6$.*
Donc $P = (X^2 - X - 6)^2 = (X-3)^2(X+2)^2$.

Exercice 2.4. *Notons λ un réel. En identifiant parties réelle et imaginaire dans l'égalité $0 = P(i\lambda) = (i\lambda)^4 + 2(i\lambda)^3 + 7(i\lambda)^2 + 8(i\lambda) + 12$, on obtient le système $\begin{cases} \lambda^4 - 7\lambda^2 + 12 = 0 \\ -2\lambda^3 + 8\lambda = 0 \end{cases}$ dont les seules solutions sont ± 2. Donc P est divisible par $(X-2i)(X+2i) = X^2+4$. La factorisation (irréductible sur $\mathbb{R}$) $P = (X^2+4)(X^2+2X+3)$ donne alors $P = (X-2i)(X+2i)(X+1-i\sqrt{2})(X+1+i\sqrt{2})$.*

Exercice 2.5. *On a $\omega^6 = e^{i\pi} = -1$ donc $P(\omega) = 0$. De même $\left(\omega^3\right)^6 = \left(\omega^5\right)^6 = -1$ donc $P(\omega^3) = P(\omega^5) = 0$. Par conjugaison, on a obtenu 6 racines :*

$$\begin{aligned} P &= \underbrace{(X-\omega)(X-\overline{\omega})}\underbrace{(X-\omega^3)(X-\overline{\omega^3})}\underbrace{(X-\omega^5)(X-\overline{\omega^5})} \\ P &= (X^2 - \sqrt{3}X + 1)(X^2+1)(X^2 + \sqrt{3}X + 1). \end{aligned}$$

Exercice 2.6. *Le polynôme $X^3 - 2$ n'admet pas de racine et est irréductible sur $\mathbb{Q}$.*

Exercice 2.7. *Racines et divisibilité.*

1. *$P = X(1+X^2)$ ne divise pas $Q = X(2+X^2)$. Les racines $\pm i$ de P ne sont pas racines de Q.*
2. *Les racines de $X^2 - 3X + 2$ sont 1 et 2 donc $X^2 - 3X + 2 = (X-1)(X-2)$. Pour tout entier $n \geqslant 1$, les réels 1 et 2 sont racines du polynôme $P_n = (X-2)^{2n} + (X-1)^n - 1$ qui est donc divisible par $X-1$ et $X-2$, donc par le produit $(X-1)(X-2) = P$ puisque $X-1$ et $X-2$ sont premiers entre eux.*

Exercice 2.8.
1. *Si $Q \neq 0$, on a $deg(Q(X^2)) = 2deg(Q)$ et $deg((X+1)Q) = 1 + deg(Q)$. L'égalité implique $deg(Q) = 1$ donc $Q = aX + b$. Par identification, il vient $b = -a$. Donc les solutions sont les polynômes de la forme $Q = aX - a = a(X-1)$.*
2. *Si $P(X^2) = (X^2+1)P(X)$, un raisonnement similaire au précédent montre que $deg(P) = 2$ (si $P \neq 0$). De plus $P(-1) = P(i^2) = (i^2+1)P(X) = 0$ et $P(1) = P(1^2) = (1^2+1)P(1) = 2P(1)$ donc $P(1) = 0$. Donc les deux racines de P sont ± 1 : $P = a(X-1)(X+1) = a(X^2-1)$ avec a complexe.*

Exercice 2.9. *La condition sur P implique (multiplicité 3 des racines) que $(X-1)^2$ et $(X+1)^2$ divisent le polynôme dérivé P' qui est de degré 4. Donc $P' = a(X-1)^2(X+1)^2 = a(X^4 - 2X^2 + 1)$. Par intégration, on obtient $P = a\left(\frac{1}{5}X^5 - \frac{2}{3}X^3 + X\right) + b$ et les conditions $\begin{cases} P(1) + 1 = 0 \\ P(-1) - 1 = 0 \end{cases}$ permettent de déterminer $a = \frac{-15}{8}$ et $b = 0$ donc $P = \frac{-3}{8}X^5 + \frac{5}{4}X^3 - \frac{15}{8}X$.*

Exercice 2.10. *Supposons que z soit une racine (dans $\mathbb{C}$) au moins double de P, alors* $P'(z) = P(z) = 0$. *On obtient alors le système* $\left\{\begin{array}{l} z^n - z + 1 = 0 \\ nz^{n-1} - 1 = 0 \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l} z\left(z^{n-1} - 1\right) = -1 \\ z^{n-1} = \frac{1}{n} \end{array}\right.$ *donc* $z\left(\frac{1}{n} - 1\right) = -1$ *ou encore* $z = \frac{1}{1-1/n} = \frac{n}{n-1} > 1$ *ce qui est contradictoire avec l'égalité* $z^{n-1} = \frac{1}{n}$.

Exercice 2.11. *Si* $P = 2X^3 - X^2 - 7X + k$ *a pour racines complexes* x, y, z *avec* $x + y = 1$, *on a*

$$\left\{\begin{array}{l} \sigma_1 = x + y + z = \frac{1}{2} \\ \sigma_2 = xy + xz + yz = \frac{-7}{2} \\ \sigma_3 = xyz = \frac{-k}{2} \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} z = \frac{-1}{2} \\ xy + (x+y)z = \frac{-7}{2} \\ xyz = \frac{-k}{2} \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} z = \frac{-1}{2} \\ k - \frac{1}{2} = \frac{-7}{2} \\ xy = k \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} z = \frac{-1}{2} \\ k = -3 \\ xy = -3 \end{array}\right.$$

Le polynôme est donc $P = 2X^3 - X^2 - 7X - 3$ *qui admet pour racines* $\frac{-1}{2}$ *et* $\frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$.

Exercice 2.12. *Avec les notations habituelles, on a* $\sigma_1 = 1$, $\sigma_2 = -2$ *et* $x^3 + y^3 + z^3 = 7$. *Il manque* σ_3 *pour déterminer le polynôme unitaire dont les solutions du système sont les racines. Mais*

$$\underbrace{(x+y+z)^3}_{1} = \underbrace{x^3 + y^3 + z^3}_{7} + 3\underbrace{(x+y+z)}_{1}\underbrace{(xy+xz+yz)}_{-2} + 6\underbrace{xyz}_{\sigma_3}$$

donc $\sigma_3 = 0$. *Il suffit de déterminer les racines de* $X^3 - X^2 - 2X = X(X+1)(X-2)$: $0, -1, 2$.

Exercice 2.13. *(théorème des deux carrés dans* $\mathbb{R}[X]$*)*

1. *Le polynôme P n'admet aucune racine réelle et son coefficient dominant est positif :*

$$P = a^2(X - z_1)(X - \overline{z_1}) \dots (X - z_m)(X - \overline{z_m}).$$

   Le polynôme $Q = a(X - z_1) \dots (X - z_m)$ *convient.*

2. *Notons* $A = \frac{Q + \overline{Q}}{2}$ *et* $B = \frac{Q - \overline{Q}}{2i}$ *les parties réelle et imaginaire de Q.*
   On a alors $Q = A + iB$ *donc* $P = Q.\overline{Q} = A^2 + B^2$.

3. *Si P est un polynôme réel positif ou nul sur* $\mathbb{R}$, *les éventuelles racines réelles sont de multiplicité paire (sinon* $P(x)$ *changerait de signe au voisinage de ces racines ; utiliser par exemple la formule de Taylor). Il suffit alors de compléter Q avec la bonne moitié des facteurs réels de P pour que la démonstration soit identique.*

3 Fractions rationnelles et décomposition en éléments simples

Exercice 3.1. *On a* $X^3 + 1 = (X+1)(X^2 - X + 1) = (X+1)(X+j)(X+\overline{j})$ *donc la fraction rationnelle* $F = \dfrac{X-2}{X^3+1}$ *admet pour pôles (simples)* -1, $-j$ *et* $-\overline{j}$ *(avec* $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ *vérifiant* $j^2 = j + 1$, $\overline{j} = j^2 = j^{-1}$,*...). Sa décomposition en éléments simples sur* $\mathbb{C}$ *est* $F = \frac{\lambda}{X+1} + \frac{\mu}{X+j} + \frac{\overline{\mu}}{X+\overline{j}}$ *avec :*

- $\lambda = (X+1)F|_{X=-1} = \frac{X-2}{X^2-X+1}|_{X=-1} = -1$
- $\mu = (X+j)F|_{X=-j} = \frac{X-2}{(X+1)(X+\overline{j})}|_{X=-j} = \frac{-j-2}{j^2-1-j+\overline{j}} = \frac{-j-2}{3j^{-1}} = \frac{-1}{3}\left(j^2 + 2j\right)$
- $\overline{\mu} = \frac{-1}{3}\left(j - 2j^2\right)$

Donc $F = \frac{-1}{X+1} + \underbrace{\dfrac{-\frac{1}{3}\left(j^2 + 2j\right)}{X+j} + \dfrac{\frac{-1}{3}\left(j - 2j^2\right)}{X+\overline{j}}}$ *sur* $\mathbb{C}$ *et* $F = \frac{-1}{X+1} + \frac{X-1}{X^2-X-1}$ *sur* $\mathbb{R}$.

Exercice 3.2. *Effectuons la division euclidienne du numérateur* $X^4 - 5X^3 + 10X^2 - 8X - 1$ *par le dénominateur* $(X-1)^3(X-2) = X^4 - 5X^3 + 9X^2 - 7X + 2$:

$$X^4 - 5X^3 + 10X^2 - 8X - 1 = (X^4 - 5X^3 + 9X^2 - 7X + 2) + X^2 - X - 3.$$

Donc $F = 1 + \underbrace{\dfrac{X^2 - X - 3}{(X-1)^3(X-2)}}_{R} = 1 + \frac{\lambda_1}{X-1} + \frac{\lambda_2}{(X-1)^2} + \frac{\lambda_3}{(X-1)^3} + \frac{\mu}{X-2}$ *avec*

- $\mu = (X-2)F|_{X=2} = \frac{X^4 - 5X^3 + 10X^2 - 8X - 1}{(X-1)^3}|_{X=2} = -1$

- $\lambda_3 = (X-1)^3 F|_{X=1} = \frac{X^4-5X^3+10X^2-8X-1}{(X-2)}|_{X=1} = -3$
- $R - \left(\frac{-3}{(X-1)^3} + \frac{-1}{X-2}\right) = \ldots = \frac{X+1}{(X-1)^2} = \frac{X-1+2}{(X-1)^2} = \frac{1}{X-1} + \frac{2}{(X-1)^2}$

Donc $F = \frac{1}{X-1} + \frac{2}{(X-1)^2} + \frac{-3}{(X-1)^3} + \frac{-1}{X-2}$.

Exercice 3.3. *Si le quotient* $F = \frac{P}{Q}$ *appartient à* $\mathbb{Q}(X)$, *il existe deux polynômes* A *et* B *dans* $\mathbb{Q}[X]$, *premiers entre eux, tels que* $F = \frac{A}{B}$. *On a alors* $AQ = BP$ *donc, d'après le théorème de Gauss,* $A|P$. *Il existe donc* D *dans* $\mathbb{C}[X]$ *tel que* $P = AD$. *On a alors* $AQ = BAD$ *donc* $Q = BD$.

Exercice 3.4. *Irrationnalité de l'exponentielle et du logarithme sur* $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$.

1. *Raisonner sur le degré : si* $F \neq 0$, $deg(F') \leqslant deg(F) - 1$ *donc l'égalité est impossible.*
2. *Supposons qu'il existe* A *et* B *dans* $\mathbb{K}[X]$ *tels que* $F = \frac{A}{B}$ *vérifie* $\frac{1}{X} = F' = \frac{A'B-AB'}{B^2}$. *On a donc* $(A'B - AB')X = B^2$.
   - *Le polynôme irréductible* X *divise* B^2 *donc* B.
   - *Supposons maintenant que* $X^n|B$ *(n entier non nul). Alors* X^{2n} *divise* $B^2 = (A'B - AB')X$ *donc* $X^{2n-1}|A'B - AB'$. *On en déduit que* $X^n|A'B - AB'$ *(car* $2n - 1 \geqslant n$*) donc* $X^n|AB'$ *(car* $X^n|B$*). Puisque* A *et* B *sont premiers entre eux alors* $X^n|B'$ *et on peut appliquer le résultat de l'exercice 1.4 :* $X^{n+1}|B$.