Université Claude Bernard Lyon 1

Agrégation interne

Formes quadratiques. Questionnaire.

E sera un espace vectoriel (en général de dimension finie) et b une forme bilinéaire symétrique de forme quadratique associée q sur E. Le corps de base est de caractéristique différente de 2 et sera souvent $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ selon le contexte.

Question 1.★ Donner trois exemples de formes bilinéaires symétriques. Un, en terme de coordonnées, un sur un espace de fonctions continues, un sur un espace de matrices carrées.

Question 2.★ Donner trois exemples de formes bilinéaires symétriques définies positives. Un, en terme de coordonnées, un sur un espace de fonctions continues, un sur un espace de matrices carrées.

Question 3.★ Donner la définition de l'application linéaire d'une espace E dans son dual associé à une forme bilinéaire symétrique b sur E. Qu'est ce que le rang de la forme bilinéaire b ?

Question 4.★ Relier l'orthogonal d'un sous-espace F pour la dualité et pour une forme bilinéaire b. Que peut on en déduire sur la dimension de l'orthogonal de F pour b ?

Question 5.★ Qu'est-ce que le bidual ? Quel est le théorème principal le concernant et son utilité dans le cadre des formes bilinéaires ?

Question 6.★ Que peut on dire de l'orthogonal de l'orthogonal (ceci n'est pas une faute de frappe !) d'un sous-espace pour une forme b ?

Question 7.★ A quoi sert l'algorithme de Gauss ? Peut il décrire le rang, la signature ? Peut il voir l'orthogonalisation simultanée quand E est munie d'une structure euclidienne ?

Question 8.★ Deux matrices carrées ont même rang. Sont elle congruentes ? Sur $\mathbb{C}$? sur $\mathbb{R}$?

Question 9.★ On suppose E de dimension n et $q = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i l_i^2$, où les l_i sont des formes linéaires indépendantes. Donner une base de E dans laquelle la matrice de q est diagonale.

Question 10.★ Soit P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$. Quelle est la matrice de passage de $\mathcal{B}^*$ vers $\mathcal{B}'^*$?

Question 11.★ On suppose E de dimension 3 sur $\mathbb{R}$. Décrire l'ensemble des solutions de l'équation $q(x) = 1$ dans une base bien choisie. On fera des cas selon la signature de q.

Question 12.★ Soit A une matrice symétrique définie positive $n \times n$ et I une sous-partie de $\{1, \dots, n\}$. Soit A_I la sous-matrice extraite de A selon les lignes et colonnes numérotées par I. La matrice A_I est-elle symétrique, définie, positive ?

Question 13.★ Le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt concerne-t-il : les formes bilinéaires symétriques quelconques ? Les formes bilinéaires symétriques non dégénérées ? Les formes symétriques définies ?

Question 14.★ Soit A une matrice symétrique définie positive et B une matrice symétrique. Montrer qu'il existe une matrice P telle que $A =^t PP$ et $B =^t PDP$ avec D diagonale.

Question 15.★ Soit f un endomorphisme de E euclidien et F un sous-espace stable par f. Est-ce que $F^\perp$ est stable par f ? Pouvez-vous donner des exemples où cela est vrai ? Quelles en sont les conséquences ?

Question 16.* Si q est non dégénérée sur E et F un sous-espace, est-ce que $q\ |_F$ est non dégénérée ? A quelle condition sur F a-t-on $F \oplus F^\perp = E$? (où $F^\perp$ est l'orthogonal pour la forme quadratique)

Question 17.* Sur $\mathbb{R}$. On suppose, pour une forme quadratique q, que $F \oplus F^\perp = E$ pour tout sous-espace F de E. A-t-on q est définie positive ?

Question 18.* Soit A une matrice définie positive et X une matrice colonne telle que ${}^tXX = 1$. Quel est le majorant de ${}^tXAX$?

Question 19.* Soit A une matrice symétrique définie positive. Comment expliciter une racine carrée de A qui soit elle-même symétrique définie positive. Celle-ci est-elle unique (difficile) ?