Université Claude Bernard–Lyon I
Agrégation interne de Mathématiques : Écrit
Année 2010–2011

Quiz d'analyse

Quelques questions d'analyse « élémentaire »

1. Vrai ou faux ? Pour tout réel $x \in [0,1[$, il existe une unique suite (a_n) à valeurs dans $\{0,\dots,9\}$ telle que $x = \sum_{n\geq 1} a_n\,10^{-n}$.

   Faux : pour assurer l'unicité, il faut de plus imposer que la suite (a_n) ne stationne pas à 9 : $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists p \geq n,\ a_p \neq 9$.

2. Quels sont « les » trois théorèmes portant sur les nombres réels ? leurs traductions en termes de suites ?

   Le corps des réels est ordonné de caractéristique nulle. Pour faire la différence avec les rationnels, il suffit d'imposer une des propriétés suivantes, qui entraîne toutes les autres :
   – Propriété de la borne supérieure. — Toute suite croissante majorée converge.
   – Propriété des segments emboîtés. — Deux suites adjacentes convergent vers la même limite.
   – Toute partie infinie bornée a un point d'accumulation. — Toute suite bornée a une valeur d'adhérence (Bolzano-Weierstrass).

3. Quels sont « les » trois théorèmes portant sur les fonctions continues réelles ?
   – Théorème des valeurs intermédiaires.
   – Toute fonction continue sur un compact est bornée et atteint ses bornes.
   – Toute fonction continue sur un compact est uniformément continue. (Utile pour la construction des intégrales de fonctions continues.)

4. Le « théorème de la bijection » est vague et grandiloquent. On la remplacera par la formule toute faite (compléter) : « toute fonction $\cdots$ établit une bijection sur son image. »

5. Au fait, quels sont les ingrédients de ce théorème : pour l'injectivité ? la surjectivité ?

   L'injectivité résulte de l'hypothèse de stricte monotonie, la surjectivité du théorème des valeurs intermédiaires.

6. Pourquoi la réciproque d'une telle fonction est-elle toujours continue ? Est-elle toujours dérivable ? Est-ce vrai si l'ensemble de départ n'est pas un intervalle de $\mathbb{R}$?

   Graphiquement, c'est clair : les seules discontinuités d'une fonction monotones sont des sauts ; mais si une fonction réciproque « faisait un saut », cela correspondrait à un intervalle de l'axe des abscisses où la fonction initiale n'a pas d'image. Avec ε, α, c'est facile.

7. Donner trois caractérisations de l'exponentielle réelle.
   – Les fonctions $x \mapsto \exp(ax)$ $(a \in \mathbb{R})$ sont les seules fonctions continues qui transforment les produits en sommes.
   – La fonction exponentielle est l'unique fonction égale à sa dérivée qui prend la valeur 1 en 0.
   – La fonction exponentielle est la réciproque de la primitive de $\mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 1/x$ qui est nulle en 1.

8. Ébaucher quatre constructions de l'exponentielle réelle.

- Somme de la série entière. [Ingrédients : toute série absolument convergente est convergente ; dérivation de la somme d'une série entière ; c'est la méthode la plus rapide, voir la page 1 d'*Analyse réelle et complexe* de Rudin.]
- La caractérisation par équation fonctionnelle donne lieu à une construction par prolongement des fonctions $x \mapsto x^{p/q}$ pour $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$. [Ingrédients :
- La caractérisation par équation différentielle donne lieu à deux constructions :
  - par le théorème de Cauchy-Lipschitz ; [ingrédient : un marteau-pilon pour une mouche misérable...]
  - par les méthodes d'Euler implicite et explicite, qui donnent lieu aux suites adjacentes $(1 + x/n)^n$ et $(1 - x/n)^{-n}$; [ingrédients : inégalité de Bernoulli, un peu de convergence uniforme de suites de fonctions ; voir CAPES 2004 ; c'est la méthode la plus élémentaire.]
- Construction de la réciproque de la primitive de $\mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 1/x$ qui est nulle en 1. [Ingrédients : existence d'une réciproque d'une fonction continue strictement monotone ; plus cher, l'existence d'une primitive d'une fonction continue.]

9. Ébaucher trois constructions des fonctions trigonométriques (cos et sin, sur $\mathbb{R}$).

   - Connaissant l'exponentielle complexe, on définit $\cos x = (\exp(ix)+\exp(-ix)/2$ et $\sin x = (\exp(ix)-\exp(-ix)/(2i)$ pour tout x réel (ou complexe, ne pinaillons pas !).
   - Par une série entière.
   - On définit $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ comme la primitive nulle en 0 de $s \mapsto 1/(1 + s^2)$. On définit $\pi = 2 \lim_{+\infty} A$ et tan comme la réciproque de A, puis on pose $\cos x = (1 - t^2)/(1 + t^2)$ et $\sin x = 2t/(1 + t^2)$ pour $x \in \mathbb{R}$ et $t = \tan(x/2)$. Le reste suit.
   - On définit $\Phi : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $y \mapsto \int_0^y \mathrm{d}t/\sqrt{1 - t^2}$: c'est la longueur de l'arc de cercle situé entre les ordonnées 0 et y. On définit $\pi = 2\Phi(1)$, sin comme la réciproque de Φ et $\cos = \sin'$. On vérifie que sin est dérivable en $\pi/2$, de dérivée nulle, on prolonge par symétrie sur $[\pi/2, 3\pi/2]$ puis par périodicité sur $\mathbb{R}$ et on vérifie que le recollement est bien $\mathcal{C}^\infty$.
   - Admettant l'existence d'une unique fonction cos solution de $y'' + y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, on pose $\sin = -\cos'$. On prouve alors la formule d'addition et l'existence d'un plus petit réel positif $\pi/2$ tel que $\cos \pi/2 = 0$. Le reste (variations, parité, périodicité...) suit facilement. [Noter que si on veut démontrer les propriétés des fonctions construites par une série entière, il faudra sans doute en passer par là !]
   - On peut penser à *construire* une solution du système différentiel $c' = -s$, $s' = c$ donc $(c, s) = (\cos, \sin)$ est solution mais il faut quelque chose : par exemple, l'exponentielle de la matrice du système, c'est-à-dire des séries entières ? Je n'ai rien de bien convaincant dans cette direction.

10. Ébaucher deux constructions de l'exponentielle complexe.

    - Par une série entière (voir le livre de Rudin mentionné ci-dessus).
    - Si on connaît les fonctions trigonométriques, on peut poser $\exp(x + iy) = e^x(\cos y + i \sin y)$ pour x, y réels. Mais attention aux cercles vicieux.

11. Quel changement de variable pour la primitive d'une fraction rationnelle en x et $\sqrt{x^2 + 4x}$? x et $\sqrt{x^2 + 4x + 5}$? x et $\sqrt{5 - x^2}$?

- On écrit : $x^2+4x=(x+2)^2-4=4[(x/2-1)^2-1]$. On pose $x/2-1=\operatorname{ch} t$, de sorte que $x^2+4x=4\operatorname{sh}^2 t$.
- On écrit : $x^2+4x+5=(x+2)^2+1$. On pose $x+2=\operatorname{sh} t$, de sorte que $x^2+4x+5=\operatorname{ch} t$.
- On écrit $5-x^2=5[1-(x/\sqrt{5})^2]$. On pose $x/\sqrt{5}=\sin t$, de sorte que $5-x^2=5\cos^2 t$. (On pourrait prendre $x/\sqrt{5}=\cos t$ à la place.)

12. Décrire les morphismes continus de groupe de $\mathbb{R}$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

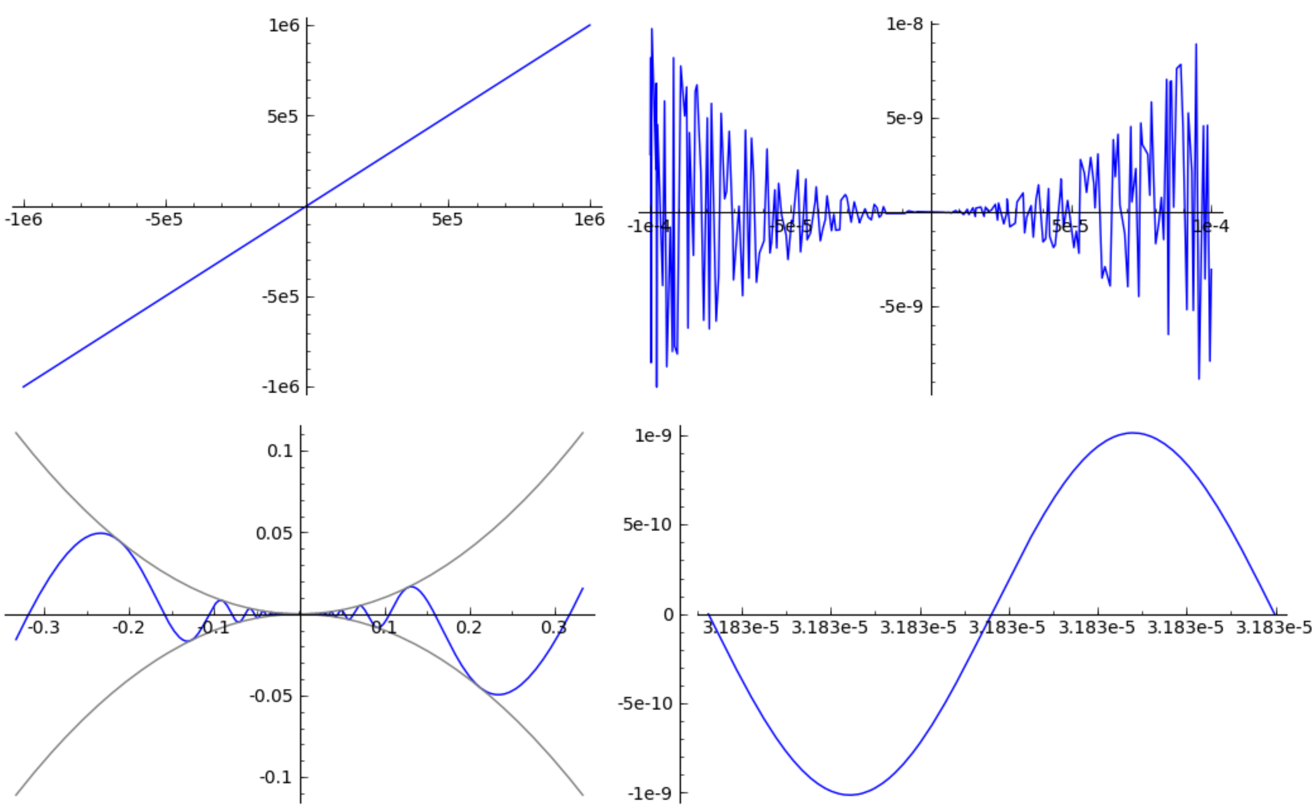
    Une autre fois.

13. Les fonctions $x\mapsto x^\alpha \sin 1/x$ ($\alpha\in\mathbb{N}$) donnent des contre-exemples bien commodes. Mais à quelles propriétés fausses ?

    - La fonction $x\mapsto x^2\sin(1/x)$ admet un développement limité d'ordre 2 en 0 mais sa dérivée n'est pas dérivable en 0. (Moins intéressant : elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ mais pas $\mathcal{C}^1$: sa dérivé n'a pas de limite en 0. NB : La fonction $x\mapsto\sin(1/x)$ n'admet pas de limite en 0 ; la fonction $x\mapsto x\sin(1/x)$ est continue en 0 mais non dérivable.)
    - La fonction $f : x\mapsto x+2x^2\sin(1/x)$ est dérivable en 0, $f'(0)=1$ et pourtant, f n'est monotone sur aucun voisinage de 0 (elle n'est pas $\mathcal{C}^1$).
    - La réunion du graphe de $x\mapsto\sin(1/x)$ et du segment $\{0\}\times[-1,1]$ est une partie connexe mais non connexe par arcs de $\mathbb{R}^2$.

14. Donner quatre intervalles sur lesquels les graphes de $x\mapsto x^2\sin 1/x$ sont « très différents ».

    Essayer $[-10^6,10^6]$, $[-10^{-2},10^{-2}]$, $[-3,3]$ et $[1/(10^4\pi+2\pi),1/(10^4\pi)]$. Expliquer.



15. La fonction $f : x\mapsto\exp(-1/x^2)$ est un contre-exemple bien commode. À quelle propriété fausse ? (NB : énoncé initial erroné !)

Elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, toutes les dérivées s'annulent en 0 mais elle n'est pas développable en série entière au voisinage de 0. Nb : On peut l'utiliser pour construire assez commodément des fonctions plateaux, par exemple valant 1 sur $[-1,1]$ et nulles hors de $[-2,2]$.

16. Démontrer, je dis bien *démontrer*, que tout fonction dérivable de dérivée nulle est constante.

    Soit f dérivable sur un intervalle, de dérivée nulle. Si $a<b$, on a *par le théorème des accroissements finis* : $f(b)-f(a)=(b-a)f'(c)=0$ pour $c\in\,]a,b[$ convenable. Grand classique de la question déstabilisante...

17. Vrai ou faux ? Si $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est dérivable et strictement décroissante, alors $f'<0$ sur $\mathbb{R}$.

    Faux, bien sûr ! La fonction $x\mapsto x^3$ est un contre-exemple facile. Il est plus compliqué de construire des fonctions dont la dérivée s'annule sur un ensemble dénombrable dense (chercher « escalier du diable » ou « escalier de Cantor »)...

18. Vrai ou faux ? Si $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ est dérivable et si $f'<0$ sur $]0,1[$, alors f est strictement décroissante sur $[0,1]$.

    Vrai ! C'est encore le théorème des accroissements finis.

19. Prouver que pour $|x|<1$, $|\ln(1+x)|\leq|x|$; que $1/(1-x)\leq e^x\leq 1+x$. Cas d'égalité ?

    Ce sont des inégalités de convexité. La première est fausse : on a $\ln(1+x)\leq x$ pour $x\in\,]-1,1[$ par concavité de ln (donc $|\ln(1+x)|\geq|x|$...). Pour les mêmes x, on a $e^x\geq 1+x$ par convexité, d'où $e^{-x}\geq 1-x$ qui donne par inversion : $e^x\leq 1/(1-x)$.

20. Quelles formules de Taylor connaissez-vous ? Quelles différences ? Quel emploi ?

    Formule de Taylor-Lagrange (qui donne lieu à une inégalité de Taylor, si on veut), Taylor-reste intégral et formule de Taylor-Young. Les deux premières ont un caractère *global*, elles portent sur tout l'intervalle $[a,b]$ ou $[a,x]$. La troisième est purement *locale*, elle peut s'exprimer comme une limite : $\lim_{x\to a}(f(x)-T_n(x))/(x-a)^n=0$, où T_n est le polynôme de Taylor d'ordre n de f en a. On ne pourra jamais démontrer une inégalité sur un intervalle prescrit à l'avance grâce à la formule de Taylor-Young : elle donnera (au mieux) l'existence d'un voisinage *non spécifié* sur lequel une inégalité sera satisfaite.

21. Pathologies : trouver...
    - une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui n'a pas de limite mais telle que $(x_{n+1}-x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ;

      Pour tout n, poser $x_n=\sin\sqrt{n}$. On sait que la suite définie par $d_{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$ pour tout n converge vers 0 (quantité conjuguée par exemple) et $|x_{n+1}-x_n|\leq d_n$ par accroissements finis. De plus, $(\sqrt{n})$ diverge vers $+\infty$, ce qui permet de montrer à coups de ε, α que tout réel de $[-1,1]$ est valeur d'adhérence.

    - une fonction qui n'est continue en aucun point de $\mathbb{R}$;

      La fonction indicatrice de $\mathbb{Q}$ est un exemple standard.

    - une fonction indéfiniment dérivable qui vaut 0 sur $]-\infty,0]$ et 1 sur $[1,+\infty[$;

      Construction standard mais pas tout à fait triviale. Voir CAPES 2002 ici.

    - une suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui tend vers 1 et telle que c_n^n tend vers 0 ; vers un réel fixé $a>0$; vers $+\infty$; vers rien du tout ;

      Dans l'ordre : $c_n=1+1/n^2$, $c_n=1+a/n$, $c_n=1+1/\sqrt{n}$, mélanger.

    - une série divergente dont le terme général est négligeable devant $1/n$.

Ben, $\sum 1/(n \ln n)$ par exemple ! Par comparaison à l'intégrale de $1/(t \ln t)$ la suite des sommes partielles est équivalente à $(\ln \ln n)$.

22. Soit I un intervalle, $f : I \to I$ dérivable (autant que l'on voudra) et une suite récurrente définie par $u_0 \in I$ et, pour tout entier n, $u_{n+1} = f(u_n)$.
   (a) Donner une condition nécessaire portant sur la limite éventuelle de (u_n).

      C'est un point fixe de f.

   (b) Donner des conditions suffisantes pour que la suite converge vers une élément r de I.

      Il suffit que $|f'| \leq k < 1$ sur I pour k convenable fixé (par exemple, f de classe $\mathcal{C}^1$ et $|f'| < 1$ lorsque I est un segment). Il suffit aussi que f' soit continue en r, que $|f'(r)| < 1$ et que u_0 soit « assez proche » de r.

   (c) Quels types de convergence peut-on attendre ?

      Si $0 < |f'(r)| < 1$ (cas générique), convergence de type géométrique ($[u_n - r| \leq K\, k^n$: chaque itération apporte un nombre constant de décimales exactes, $lnk/\ln 10$ pour être précis). Si $|f'(r)| = 0$, convergence au moins quadratique ($|u_n - r| \leq K\, k^{2^n}$: chaque itération double asymptotiquement le nombre de décimales exactes) ; précisément quadratique si $f''(r) \neq 0$; exemples : méthode de Newton, suites de Babylone (cas particulier).

23. Quels problèmes classiques se ramènent à une suite récurrente du type précédent ?

   Par exemple : recherche des zéros d'une fonction par la méthode de Newton ou la méthode de la sécante ; preuve de Picard du théorème d'existence de Cauchy-Lipschitz ; preuve classique du théorème d'inversion locale (s'interprète comme l'application de la méthode de Newton) ; résolution numérique de systèmes linéaires (« méthodes itératives »)...

24. Vrai-faux ? Toute suite positive qui tend vers zéro décroît à partir d'un certain rang.

   Faux ! Prendre $u_n = 1/n$ si n est impair et $u_n = 0$ si n pair.

25. Vrai ou faux ? Si deux suites sont équivalentes, les séries associées convergent toutes les deux ou divergent toutes les deux.

   Faux ! Prendre $u_n = (-1)^n/n$ et $v_n = u_n + 1/(n \ln n)$. La série $\sum u_n$ converge par le critère spécial des séries alternées, la série $\sum v_n$ diverge par comparaison à une intégrale (voir ci-dessus).

26. Énoncer et démontrer le critère spécial des séries alternées.

   Non.

27. Que peut-on dire de la convergence d'une série entière à l'intérieur du disque de convergence ? sur le bord du disque ? à l'extérieur du disque ?

   Convergence absolue et convergence normale sur tout compact à l'intérieur du disque, divergence grossière à l'extérieure (le terme général tend même vers $+\infty$), indétermination sur le bord (exemples à garder en tête : $\sum x^n$ qui converge en certains points, pas en d'autres ; $\sum x^n/(n+1)^2$ qui converge partout ; $\sum nx^n$ qui diverge partout).

28. À quelle condition une fraction rationnelle est-elle développable en série entière au voisinage de zéro ? Quel est le rayon de convergence de la série obtenue ?

   Il est nécessaire et suffisant que 0 ne soit pas un pôle. Le rayon de la série obtenue est le module minimal d'une racine du dénominateur.

29. Vrai ou faux ? Le rayon de convergence de la somme de deux séries entières est le plus petit des deux rayons.

    Faux. Par exemple, si une série a un rayon fini, la somme de cette série et de son opposée a un rayon infini. On a cependant une inégalité : le rayon de la somme est *au moins* le minimum des deux rayons.

30. Peut-on prévoir *a priori* l'intervalle de définition d'une solution maximale d'une équation différentielle ?

    Non, à moins d'avoir une condition de type Lipschitz par rapport à la deuxième variable, ce qui est rare. Le caractère $\mathcal{C}^\infty$ de f ne garantit pas l'existence d'une solution globale de $y' = f(t, y)$. Exemple à garder en tête : $y' = y^2$ donc les solutions sont de la forme $t \mapsto 1/(t_0 - t)$: elles explosent toutes en temps fini.

31. Les questions techniques les plus difficiles sont souvent des permutations de limites. Donner des exemples de telles situations en précisant le théorème qui justifie l'interversion.

    Convenons qu'une intégrale est une limite (sur les subdivisions, par exemple), de même que la somme d'une série et une dérivation.

    - $\lim_{t\to t_0} \sum_k u_k(t) \stackrel{?}{=} \sum_k \lim_{t\to t_0} u_k(t)$: théorème de convergence dominée ou théorème de convergence monotone (pour les séries) ; inclut le cas où t est une variable entière qui tend vers $+\infty$;
    - $\lim_{t\to t_0} \int f(t, x)\,\mathrm{d}x \stackrel{?}{=} \int \lim_{t\to t_0} f(t, x)\,\mathrm{d}x$: théorème de convergence dominée ou théorème de convergence monotone (pour les intégrales) ; inclut le cas où t est une variable entière qui tend vers $+\infty$;
    - $\sum_{k\geq 0} \int u_k(x)\,\mathrm{d}x \stackrel{?}{=} \int \sum_{k\geq 0} u_k(x)\,\mathrm{d}x$: se ramener au précédent ;
    - $\partial/\partial t \int f(t, x)\,\mathrm{d}x \stackrel{?}{=} \int \partial f/\partial t(t, x)\,\mathrm{d}x$: théorème de dérivation sous $\int$ (ce qui revient à applique le théorème de convergence dominée à la dérivée partielle) ;
    - idem avec $\sum_k$ au lieu de $\int \mathrm{d}x$...
    - $\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} \stackrel{?}{=} \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}$: théorème de Schwarz ;
    - à vot'bon cœur, m'sieurs-dames : j'attends vos contributions !

Local et global ?

Voici une remarque d'ordre général puisqu'il reste un peu de place. J'appelerais volontiers *propriété globale* une propriété qui est vraie sur un ensemble *prescrit à l'avance* ; par contraste, une *propriété locale* est une propriété qui est vraie sur un voisinage du point que l'on considère que l'on ne connaît pas *a priori*.

Par exemple, le fait pour une fonction continue d'être bornée sur un segment est typiquement une propriété globale ; la continuité est une propriété locale (≪ quel que soit le point et quelle que soit la contrainte, il existe un voisinage du point sur lequel... ≫). La dérivabilité est une hypothèse locale ; l'existence d'un point c tel que $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$ est globale : c'est une propriété de l'intervalle de contenir un tel point c. De même, la monotonie est une propriété globale. Ainsi, le théorème exprimant qu'une fonction continue est bornée (resp. uniformément continue), les accroissements finis, etc., sont *des théorème de passage du local au global.*

Reprenez les théorèmes d'analyse au programme : ils ont presque tous (enfin, un bon nombre !) cette caractéristique de permettre le passage du local au global –et c'est pour cela qu'ils sont non triviaux ! C'est aussi pour cela que la formule de Taylor-Young n'est pas souvent adaptée et qu'on lui préfèrera souvent une formule globale comme Taylor-Lagrange, Taylor-reste intégral ou l'inégalité de Taylor (qui consiste à majorer $f^{(n)}$ par une constante dans Taylor-Lagrange).