Université Claude Bernard–Lyon I
Agrégation interne de Mathématiques : Écrit
Année 2011–2012

Questions de géométrie

I Géométrie affine

1° Deux définitions ?

a) Réconcilier les deux définitions suivantes ([Audin], Déf. I.2.1 et Ex. I.63).

Première définition Un ensemble $\mathcal{E}$ est muni d'une structure d'*espace affine* par la donnée d'un espace vectoriel E et d'une application $\Theta : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \to E$, $(A, B) \mapsto \overrightarrow{AB}$ telle que :
– pour tout point A de $\mathcal{E}$, l'application $\Theta_A : B \mapsto \overrightarrow{AB}$ soit une bijection de $\mathcal{E}$ sur E ;
– pour tous points A, B et C de $\mathcal{E}$, on ait : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$.

Deuxième définition Un ensemble $\mathcal{E}$ est muni d'une structure d'*espace affine* par la donnée d'une action simplement transitive d'un espace vectoriel E, considéré comme groupe, sur $\mathcal{E}$.
On rappelle qu'une action de E sur $\mathcal{E}$ est un morphisme de groupes $T : v \mapsto \tau_v$ de E vers le groupe des bijections de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$. L'action est transitive si deux points quelconques A et B de $\mathcal{E}$ sont dans la même orbite, i.e. il existe v de E tel que $\tau_v(A) = B$; elle est simplement transitive si un tel v est uniquement défini par A et B.
b) Définir ce qu'est un repère d'un espace affine. Écrire la formule de changement de repère.
c) Sur une droite affine, définir ce qu'est la mesure algébrique ; pourquoi un quotient de mesure algébriques est-il une quantité intrinsèque ?
d) **Un seul exemple ?** On se donne un corps $\mathbb{K}$ et un entier naturel n. Munir $\mathbb{K}^n$ d'une structure d'espace affine. Pourquoi cet exemple donne-t-il une classification des espaces affines ? (En quoi anticipe-t-on sur la suite ici ?)

2° Applications affines

a) Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ des espaces affines dirigés par des espaces vectoriels E et F et soit $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ une application. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

1. il existe une application linéaire $\varphi : E \to F$ telle que pour tous points A et B de $\mathcal{E}$, on ait :
$$\overrightarrow{f(M)f(N)} = \varphi\left(\overrightarrow{MN}\right) ;$$
2. l'application f préserve le barycentre (sens ?) ;
3. dans un repère donné, les coordonnées de l'image d'un point M sont de la forme $AX + B$, où A est une matrice, B la colonne des coordonnées d'un point de $\mathcal{F}$ et X la colonne des coordonnées de M.

b) Si le corps de base est le corps des réels, identifier « l'application linéaire associée » à la différentielle.
c) Montrer que l'on caractérise une application affine et une seule par la donnée, au choix,
– de l'image d'un point et d'une application linéaire linéaire sur E ;
– de l'image d'un repère affine.

3° Équations de droites et de plans

a) Montrer que les droites d'équations $ax + by + c = 0$, $a'x + b'y + c' = 0$ et $a''x + b''y + c'' = 0$ sont parallèles ou concourantes SSI le déterminant 3×3 que l'on imagine est nul. Comment lire ce résultat dans l'espace ?
Dans ce paragraphe, on se place dans $\mathbb{R}^3$.

b) Donner une équation cartésienne du plan passant par $A = (1, 0, 1)$ et dont la direction est engendrée par les vecteurs $u(0, 2, 1)$ et $v = (1, -1, 0)$.
c) Donner une équation du plan parallèle au précédent et passant par $B = (0, 1, 0)$.
d) Donner une équation du plan parallèle au précédent et passant par le milieu de $[AB]$.
e) A quelle condition les systèmes

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} a'_1x + b'_1y + c'_1z = 0 \\ a'_2x + b'_2y + c'_2z = 0 \end{cases}$$

décrivent-ils des droites vectorielles de E ? la même droite de E ?
f) A quelle condition les systèmes

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} a'_1x + b'_1y + c'_1z = d'_1 \\ a'_2x + b'_2y + c'_2z = d'_2 \end{cases}$$

décrivent-ils des droites vectorielles de $\mathcal{E}$? la même droite de $\mathcal{E}$?

4° Dévissage du groupe affine

On note $\mathrm{Aff}(\mathcal{E})$ le groupe des bijections affines de $\mathcal{E}$ sur lui-même, $\mathcal{T}$ le groupe des translations (applications de la forme $\tau_u : M \mapsto M + u$ pour $u \in E$), $\mathrm{GL}(E)$ le groupe des automorphismes linéaires de E (applications linéaires inversibles de E sur E).
a) On fixe un point $O \in \mathcal{E}$ et on note

$$\mathrm{Aff}_O(\mathcal{E}) = \{f \in \mathrm{Aff}(\mathcal{E}),\ f(O) = O\}.$$

Vérifier que $\mathrm{Aff}_O(\mathcal{E})$ est un sous-groupe de $\mathrm{Aff}(\mathcal{E})$. Vérifier que pour $g \in \mathrm{Aff}(\mathcal{E})$, l'application [1] $f \mapsto gfg^{-1}$ définit un isomorphisme de $\mathrm{Aff}_O(\mathcal{E})$ sur $\mathrm{Aff}_{g(O)}(\mathcal{E})$. Montrer qu'on définit un isomorphisme de $\mathrm{Aff}_O(\mathcal{E})$ sur $\mathrm{GL}(E)$ en associant l'application linéaire sous-jacente à une application affine.
b) Montrer que pour $u \in E$, $f \in \mathrm{Aff}_O(\mathcal{E})$ et φ l'application linéaire associée à f, on a [2] :

$$f \circ \tau_u \circ f^{-1} = \tau_{\varphi(u)}.$$

c) Montrer que tout élément de $\mathrm{Aff}(\mathcal{E})$ s'écrit de façon unique comme produit d'un élément de $\mathcal{T}$ et d'un élément de $\mathrm{Aff}_O(\mathcal{E})$ (dans l'ordre que l'on voudra).
On résume les propriétés ci-dessus par la notation : $\mathrm{Aff}(\mathcal{E}) \simeq \mathcal{T} \rtimes \mathrm{GL}(E)$.

II Géométrie euclidienne dans le plan

1° Relations métriques dans un triangle (rectangle ou pas)

À votre bon cœur, m'sieurs-dames !

2° Isométries vectorielles directes dans le plan

Soit $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ des rotations plantes, c'est-à-dire des isométries vectorielles du plan affine euclidien $\mathbb{R}^2$ qui ont un déterminant positif.
a) Montrer que l'on a :

$$\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix},\quad a^2 + b^2 = 1 \right\}.$$

b) En déduire que $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ est commutatif.

1. "Principe de conjugaison..."
2. "Principe de conjugaison..."

c) Vérifier que $SO_2(\mathbb{R})$ agit de façon simplement transitive sur le cercle-unité de $\mathbb{R}^2$.
d) Définir le cosinus et le sinus d'une rotation ρ. Énoncer et vérifier une formule pour $\cos(\rho\rho')$.
e) Identifier $SO_2(\mathbb{R})$ à $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Quel choix faut-il faire ? Quelle propriété de $SO_2(\mathbb{R})$ est utilisée ?

3° Construction de la notion d'angle

a) Proposer des définitions des angles –orientés ou non, de droites ou de vecteurs– valables dans le plan comme dans l'espace. Est-il nécessaire d'orienter le plan ou l'espace pour parler d'angle orienté ?
b) Identifier l'ensemble des angles orientés de vecteurs du plan avec $SO_2(\mathbb{R})$. Définir la somme de deux angles. A-t-on besoin d'une orientation pour tout cela ? Définir la mesure d'un angle.
c) Pourquoi les angles ne se comportent-ils pas du tout de la même façon dans l'espace ?

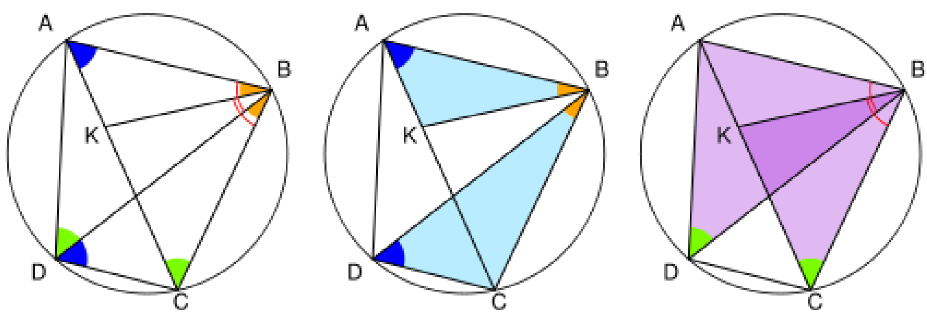
4° Similitudes et triangles semblables

a) Démontrer que si une application multiplie toutes distances par une constante non nulle, elle est affine et préserve ou renverse les angles orientés.
b) Démontrer que si deux triangles ont deux angles égaux (resp. un angle et deux côtés proportionnels, resp. trois côtés proportionnels), ils sont semblables (i.e. il existe une similitude qui envoie l'un sur l'autre).

5° Théorème de Ptolémée (1)

Soit $ABCD$ un quadrilatère non croisé inscriptible dans un cercle. Alors :

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC.$$



[Indication : on introduit K sur le segment $[AC]$ de sorte que les angles $\widehat{ABK}$ et $\widehat{BDC}$ soient égaux. Vérifier que les triangles ABK et BDC (resp. ABD et KBC) sont semblables. Conclure en exploitant : $AK + KC = AC$.]

III Nombres complexes et géométrie

1° Birapport

On se place dans $\mathbb{P}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, où ∞ est un symbole qui ne désigne pas un nombre complexe.
a) Définir ce qu'est une homographie. Montrer que le groupe des homographies agit trois fois simplement transitivement sur $\mathbb{P}^1$, c'est-à-dire qu'étant donnés trois complexes distincts a, b et c, il existe une unique homographie h qui envoie a sur 0, b sur ∞ et c sur 1.
b) Avec les notations ci-dessus, établir que l'application qui envoie (a, b, c, d) sur $h(d) = [a, b, c, d]$ est une bijection de l'ensemble des quadruplets de complexes distincts à homographie près sur $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$.
c) Prouver que le birapport $[a, b, c, d]$ est invariant par homographies : d'abord en utilisant la définition géométrique ci-dessus, ensuite en utilisant la formule explicite de h.
d) Quelle ressemblance y a-t-il avec la situation des vecteurs ? des angles dans le plan ? Quelle différence importante provient de la non-commutativité du groupe des homographies ?

2° Théorème de l'angle inscrit et critère de cocyclicité

a) Démontrer le théorème de l'angle inscrit avec des considérations d'angles.
b) Pour α et β réels, déterminer module et argument de $e^{i\alpha} - e^{i\beta}$. Donner une expression « trigonométrique » du birapport de quatre points sur le cercle-unité ; retrouver « le » critère de cocyclicité.
c) Utiliser l'expression précédente pour définir le birapport de quatre droites concourantes.
d) Théorème de Ptolémée (2) Reprendre les calculs de b) pour en déduire une preuve complexo-trigonométrique du théorème de Ptolémée pour quatre points sur le cercle-unité, puis pour quatre points sur un cercle quelconque.
e) Théorème de Ptolémée (3) Démontrer que $[a,b,c,d] = 1 - [a,c,b,d]$ pour $(a,b,c) = (0,\infty,1)$ et d dans $\mathbb{C}\setminus\{0,1\}$, puis pour (a,b,c,d) quelconques mais distincts dans $\mathbb{P}^1$. En déduire le théorème de Ptolémée.
f) Lignes de niveau du module et de l'argument de $z \mapsto (z-a)/(z-b)$. Orthogonalité.

3° Inversions

a) Définir une inversion de pôle A et de rayon r. Écriture en coordonnées cartésiennes et complexe. Montrer que l'image d'un cercle ou d'une droite est un cercle ou une droite (deux méthodes : avec le birapport et avec l'équation cartésienne). Étant donné B et C et leurs images B' et C', calculer la longueur $B'C'$ en fonction de BC, AB et AC.
b) Théorème de Ptolémée (réciproque et 4) Soit A, B, C, D quatre points tels que $AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD$. L'inversion de pôle A et de rapport 1 envoie B sur B', etc. Prouver qu'on a : $B'D' = C'D' + B'C'$. En déduire que le quadrilatère $ABCD$ est inscriptible. Redémontrer une quatrième fois le sens direct.

4° Formule des six birapports et applications

a) Étudier ce que devient le birapport lorsqu'on permute les quatre points. (Pourquoi peut-on supposer $a = 0$, $b = \infty$, $c = 1$?)
b) Soit a,b,c,d,p,q,r,s des complexes distincts. Prouver que l'on a (à peu de choses près) :

$$[a,b,c,d]\ [a,r,d,p]\ [a,q,p,c]\ [s,c,q,b]\ [s,p,r,q]\ [s,d,b,r] = 1.$$

[S'aider d'un *cube*.] Cette formule s'utilise généralement de la façon suivante : on s'arrange pour être sûr que cinq des six birapports sont réels ; on en déduit que le sixième est réel.
c) Théorème du pivot. Soit $C_1, \dots, C_4$ quatre cercles ; on suppose que C_1 et C_2 se coupent en A et A', C_2 et C_3 se coupent en B et B', C_3 et C_4 se coupent en C et C' et C_4 et C_1 se coupent en D et D'. Montrer que A,B,C,D sont cocycliques ou alignés SSI A',B',C',D' le sont.
d) Théorème de Miquel. Soit quatre cercles ayant un point commun, en position générale pour cette contrainte. Pour tout choix de trois de ces quatre cercles, on considère le cercle circonscrit au triangle formé par les intersections des trois cercles. Alors les quatres cercles ainsi construits sont concourants.
e) Par anti-projection stéréographique, tenter d'en déduire le sens non trivial de l'équivalence suivante. Soit $ABCDEFGH$ un hexaèdre (c'est-à-dire que les points satisfont à 6 conditions de coplanarité lorsqu'on les prend par 4 comme sur un cube). Alors l'hexaèdre est inscriptible sur une sphère SSI les six faces sont inscriptibles dans des cercles.

5° Projection stéréographique

Dans $\mathbb{R}^3$ euclidien orienté standard, on considère $\mathbb{S}$ la sphère-unité d'équation $x^2+y^2+z^2=1$ et l'équateur E, c'est-à-dire le plan d'équation $z=0$ qu'on identifie à $\mathbb{C}$. On note $N=(0,0,1)$ le pôle nord, $S=(0,0,-1)$ le pôle sud. Étant donné un point M de $\mathbb{S}$ distinct de N (resp. de S) on lui associe $p(M)$ (resp. $p'(M)$) le point d'intersection de la droite NM (resp. SM) et de E.

a) Vérifier que p (resp. p') est une bijection de $\mathbb{S} \setminus \{N\}$ (resp. $\mathbb{S} \setminus \{S\}$) sur $E = \mathbb{C}$.
b) Vérifier que la restriction de $p' \circ p^{-1}$ à $\mathbb{C}^*$ est : $z \mapsto z^{-1}$.
c) Définir une inversion dans l'espace. Vérifier que p et p' sont des inversions. Prouver qu'une inversion transforme une sphère ne contenant pas le pôle de l'inversion en une sphère et une sphère contenent le pôle en un plan. En déduire que p et p' envoient les cercles tracés sur la sphère $\mathbb{S}$ sur des cercles ou des droites et inversement.

IV Géométrie euclidienne dans l'espace

1° Reconnaissance de matrices

Programme indicatif de reconnaissance :

- la matrice est-elle symétrique ?
- la matrice est-elle orthogonale ? unitaire ?
- quelles sont ses valeurs propres ?
- quelle est sa nature géométrique ? (rotation, projecteur, symétrie, affinité, transvection, etc.)
- quels sont ses éléments caractéristiques ? (i.e., axe et angle d'une rotation, espaces propres pour une symétrie ou un projecteur, etc.)

$$\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{25}\begin{pmatrix} -9 & 12 \\ 12 & -16 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 23 & 36 \\ 36 & 2 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 37 & 9 \\ -16 & 13 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 \\ -2 & 8 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 \\ -2 & 8 & 2 \\ -4 & -2 & -5 \end{pmatrix}.$$

2° Sous-espaces stables

Quels sont les sous-espaces stables par la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix} ?$$

On remarquera qu'une droite stable est nécessairement portée par un vecteur propre de A et qu'un plan stable est l'orthogonal d'un vecteur propre de ${}^tA$.

3° Produit vectoriel

On se donne $\omega = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ et on considère $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $v \mapsto \omega \wedge v$.
a) Vérifier que φ est linéaire. Ecrire sa matrice dans la base canonique ; dans une base orthonormée dont ω est le premier vecteur.
b) Géométriquement, que fait φ ? Noyau, image de φ ?
c) On donne de plus $u \in \mathbb{R}^3$. Discuter l'équation $\omega \wedge v = u$, d'inconnue $v \in \mathbb{R}^3$.
d) On suppose pour simplifier que $||\omega|| = 1$. Ecrire une formule pour la rotation d'angle $\theta \in \mathbb{R}$ autour de ω.
e) Soit R la matrice de la rotation d'angle θ autour de ω : calculer $R - R^{-1}$. (On pourra faire le calcul indépendamment de la question précédente : à quoi cela sert-il ?)

4° Projections orthogonales

a) Soit E un espace euclidien de dimension finie et $\pi \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur : $\pi^2 = \pi$. Montrer que π est égal à son adjoint si et seulement si son image et son noyau sont orthogonaux.
b) Soit $\Pi \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$ (où $n \in \mathbb{N}^*$). On suppose que $\Pi^2 = \Pi$. Montrer que ${}^t\Pi = \Pi$ si et seulement si $\mathrm{Ker}\,\Pi \perp \mathrm{Im}\,\Pi$.

c) Déterminer la matrice de la projection orthogonale sur la droite engendrée par (a, b, c) ; sur le plan d'équation $ax + by + cz = 0$.

5° Des remarques utiles

a) Soit ρ une rotation d'angle θ autour de ω et g une isométrie quelconque. Montrer que $g\rho g^{-1}$ est la rotation d'angle θ autour de $g(\omega)$.
b) (Variante.) Soit σ une réflexion par rapport à l'hyperplan H et g une isométrie quelconque. Montrer que $g\sigma g^{-1}$ est une réflexion par rapport à $g(H)$.
c) Pour une application linéaire φ de $\mathbb{R}^n$ euclidien, les conditions suivantes sont équivalentes :

- $\forall v, v' \in \mathbb{R}^n, \quad \langle \varphi(v), \varphi(v') \rangle = \langle v, v' \rangle$;
- $\forall v \in \mathbb{R}^n, \quad ||\varphi(v)|| = ||v||$;
- la matrice A de φ dans une base orthonormée est orthogonale : ${}^tA\,A = \mathrm{Id}$.

d) Si F est un sous-espace stable par une isométrie, il en est de même de son orthogonal. Ceci est intéressant en particulier pour les espaces propres.
e) Quelles peuvent être les valeurs propres réelles d'une isométrie de $\mathbb{R}^n$?

6° Engendrement de O_3 par les réflexions

a) Montrer que la composée de deux réflexions est une rotation. Comment trouver l'axe et l'angle ?
Application numérique. On considère la composée des réflexions de plans $2x + y - z = 0$ et $x - y - 2z = 0$. Déterminer la matrice des reflexions, de leurs composée (dans l'ordre que l'on voudra), l'axe et l'angle de la composée.
b) Montrer que toute rotation peut s'écrire comme le produit de deux réflexions. En déduire que toute isométrie de $\mathbb{R}^3$ peut s'écrire comme le produit d'au plus trois réflexions.
Si on écrit une isométrie de $\mathbb{R}^3$ comme produit de réflexions, que peut-on dire de la parité du nombre de réflexions ?
Application numérique. Trouver une décomposition explicite pour

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

7° Engendrement de SO_3 par les demi-tours

a) Déterminer la composée de deux demi-tours d'axes orthogonaux.
b) En déduire que SO_3 est engendré par les demi-tours.

8° Simplicité de SO_3

On suppose que $G \subset \mathrm{SO}_3$ est un sous-groupe non réduit à $\{\mathrm{Id}\}$ et distingué, i.e. tel que pour tout $\varphi \in G$ et tout $g \in G$, on ait $g\varphi g^{-1} \in G$.
a) Pour $\varphi \in \mathrm{SO}_3$ on pose : $\cos\varphi = \frac{1}{2}(\mathrm{tr}\,\varphi - 1)$. Pourquoi ?
b) Montrer qu'il existe $\varphi \in G$ tel que $\cos\varphi < 0$. (Prendre des puissances d'un élément non trivial.)
c) Montrer qu'il existe $v \in \mathbb{R}^3$ tel que $\langle \varphi(v), v \rangle = 0$. (Faire un dessin.)
d) On note D la droite engendrée par v, D' la droite engendrée par $\varphi(v)$ et ρ le retournement autour de D. Se rappeler que $\varphi\rho\varphi^{-1}$ est le retournement autour de D'. En déduire que $\psi = \rho\varphi\rho\varphi^{-1}$ est un retournement.
e) Vérifier que G contient le retournement ψ. En déduire que G contient tous les retournements, puis que $G = \mathrm{SO}_3$.