Tice et principe de récurrence

Les TICE apparaissent naturellement aux deux "opposés" dans ce chapitre :
– construction des connaissances
– réinvestissement dans des problèmes
Par ailleurs le principe de récurrence est traité par beaucoup très tôt dans l'année. Ce peut donc être un lieu privilégié de réactivation des compétences TICE de base.

Problèmes dans l'enseignement de la récurrence	Apport espéré des TICE
Non compréhension des liens du type $u(n+1) = f(u(n))$ (confusion dans les indices...)	Les TICE permettent de s'affranchir provisoirement de ces notations pour se concentrer sur le processus itératif.
Non compréhension de la notion d'implication dans l'étape d'hérédité	Multiplication immédiate des situations aidant à cette compréhension (cf exercices 2 et 3)
Non compréhension d'un énoncé. Lorsqu'on demande d'établir $\sum_{j=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$, un nombre non négligeable d'élèves n'hésitent pas à utiliser l'égalité comme une donnée.	Avec les TICE, l'élève conjecture par lui-même le second membre. Moins de risque de confusion dans le statut de cette égalité et pour certains plus de motivation pour la justification.

L'apport est bien décrit par ce petit extrait du programme de 1 ère S : « l'informatique, sanctionnant immédiatement et visiblement les fautes de syntaxe, contribue à former à l'esprit de rigueur, notamment dans la manipulation des objets traités (nombres, variables, figures géométriques). »

I Tableur

Exercice 1
Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u(n) = 7^{2n+1} + 1$.

1. Définir une feuille de tableur sur le modèle suivant :

	A	B	C	D	E
1	Valeurs de n	Valeurs de u_n	Valeurs de u_{n+1}		
2	0	u_0	u_1		
3	1	u_1	u_2		
4	2	u_2	u_3		
5	3	u_3	u_4		
⋮	⋮	⋮			

2. Tracer un graphique avec en abscisses les valeurs de la colonne B et en ordonnées les valeurs de la colonne C.
3. En déduire une définition de la suite u par récurrence. Contrôler en colonne D.

Apport TICE.

1. Mieux comprendre une relation de récurrence en évitant les parasites de non-compréhension des indices (confusion entre $u(n+1)$ et $u(n)+1$ ...).
2. Mieux comprendre ces problèmes d'indice. Notamment avec deux versions de la colonne C :

	A	B	C	C bis	D
1	Valeurs de n	Valeurs de u_n	Valeurs de u_{n+1}	Valeurs de u_{n+1}	Contrôle
2	0	=7^(2*A2+1)+1	=B3	=7^(2*(A2+1)+1)+1	8
3	1	=7^(2*A3+1)+1	=B4	=7^(2*(A3+1)+1)+1	=49*D2−48
⋮	⋮	⋮			

Compétences TICE.
Compétences de base :

1. Définir une opération élémentaire dans une feuille de tableur.

2. Copier une formule d'une cellule à une autre.
3. Tracer un graphique (une colonne en fonction d'une autre). ⋆

Exercice 2

On calcule les premiers termes d'une suite u à l'aide d'une feuille de tableur de la façon suivante :

	A	B	C	D	E
1	Valeurs de n	Valeurs de u_n			
2	0	u_0			
3	1	=2∗B2−3			
4	2	=2∗B3−3			
5	3	=2∗B4−3			
⋮	⋮	⋮			

1. En colonne C, afficher "oui" lorsque u_n est multiple de 3 et un message vide sinon.
2. Observer les affichages de la colonne C en fonction des valeurs de u_0. Commentaires…

Apport TICE.

Comprendre plus facilement le rôle de l'amorce dans une récurrence (le caractère héréditaire de « u_n est multiple de 3 » est valable quel que soit u_0) en visualisant immédiatement l'effet d'un "désamorçage".

Compétences TICE.

1. Un problème : sur tableur, le test est rapidement erroné (ou planté) sur les grands nombres. L'occasion de faire des commentaires sur les méthodes de calcul des logiciels ?
2. Test conditionnel.
3. Instruction mod ou instruction ent.

	A	B	C	D	E
1	Valeurs de n	Valeurs de u_n			
2	0	u_0	=SI(MOD(B2;10)=0;"oui";"/")		
3	1	=2∗B2−3	=SI(MOD(B3;10)=0;"oui";"/")		
4	2	=2∗B3−3	=SI(MOD(B4;10)=0;"oui";"/")		
⋮	⋮	⋮			

Exercice 3

On calcule les premiers termes d'une suite u à l'aide d'une feuille de tableur de la façon suivante :

	A	B	C	D	E
1	Valeurs de n	Valeurs de u_n			
2	0	u_0			
3	1	=2∗B2+6			
4	2	=2∗B3+6			
5	3	=2∗B4+6			
⋮	⋮	⋮			

1. En colonne C, afficher "oui" lorsque u_n est multiple de 10 et un message vide sinon.
2. Observer les affichages de la colonne C en fonction des valeurs de u_0. Commentaires…

Apport TICE.

Avec plusieurs valeurs de u_0, on observe des multiples de 10 tous les 4 termes mais avec une amorce qui change de rang. On aide à la compréhension de l'hérédité en visualisant un cas d'hérédité sautant quelques générations.

$$u_{n+4} = 16u_n + 90$$

Le fait de voir que toutes les générations ne sont pas multiples de 10 aident également à comprendre la notion d'implication qui pose problème à beaucoup d'élèves dans une démonstration par récurrence. « Si u_n est multiple de 10 alors u_{n+4} est multiple de 10 » s'illustre en descendant dans la colonne ou en remontant dans la colonne :

1. Lorsque u_n est multiple de 10, u_{n+4} aussi
2. Lorsque u_n n'est pas multiple de 10, u_{n-4} non plus.

Et le changement de valeurs sur u_0 permet d'insister sur le fait que l'implication ne permet aucune conclusion sur u_{n+4} lorsqu'on part d'un u_n non multiple de 10 :

1. pour $u_0 = 11$, on a $u_4 = 266$ non multiple de 10.
2. pour $u_0 = 5$, on a $u_4 = 170$ multiple de 10. ⋆

Compétences TICE.
Les mêmes que l'exercice 2 ⋆

Exercice 4
Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$u(n) = \frac{1}{6} n (n+1)(2n+1)$$

1. Définir une feuille tableur avec :
   (a) en colonne 1, les entiers $0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; \ldots$
   (b) en colonne 2, les valeurs de u_n
   (c) en colonne 3, les valeurs de la suite v définie pour $n \geqslant 1$ par : $v_n = u_n - u_{n-1}$.
2. En colonne D, la cellule D2 contenant la valeur de u_0, retrouver les termes de la suite u en définissant une formule dans la cellule D3 (à recopier ensuite dans la colonne) ne faisant intervenir que les références D2 et A3. Traduire cette définition de la suite u avec les notations usuelles.
3. Comment retrouver les valeurs de la suite en utilisant la fonction SOMME du logiciel ?

Apport TICE.
Feuille tableur :

	A	B	C	D	E	F
1	Valeurs de n	Valeurs de u_n	u_n	u_n par récurrence	n^2	somme
2	0	=1/6*A2*(A2+1)*(2*A2+1)		0	=A2^2	=SOMME(E$2:E2)
3	1	=1/6*A3*(A3+1)*(2*A3+1)	=B3−B2	=D2+A3^2	=A3^2	=SOMME(E$2:E3)
4	2	=1/6*A4*(A4+1)*(2*A4+1)	=B4−B3	=D3+A4^2	=A4^2	=SOMME(E$2:E4)
5	3	=1/6*A5*(A5+1)*(2*A5+1)	=B5−B4	=D4+A5^2	=A5^2	=SOMME(E$2:E5)
⋮	⋮					

L'apport est essentiellement de permettre manipulations numériques et conjectures aux élèves bloqués par les notations formelles. L'effort de traduction de la colonne D en la formule $u_n = u_{n-1} + n^2$ peut en faire progresser certains vers une meilleure maîtrise du sens de ces notations. ⋆

Compétences TICE.

1. Compétences de base (définir une opération élémentaire, copier une formule).
2. Utilisation de la fonction SOMME.
3. Utilisation d'une référence absolue. ⋆

Exercice 5

1. a désigne un nombre réel.
   On définit une suite u par :
   $$\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = 2 + \ln(u_n) \end{cases}$$
   (a) Définir une feuille de tableur calculant les premiers termes de la suite.

(b) A l'aide d'une représentation graphique, faire des conjectures sur le comportement de la suite en fonction du terme initial $u_0 = a$.

On se posera notamment les questions suivantes :

i. Définit-on ainsi une suite pour toute valeur de a ?

ii. La suite u semble-t-elle croissante pour certaines valeurs de a ? décroissante pour certaines valeurs de a ? constantes pour certaines valeurs de a ?

iii. La suite semble-t-elle majorée, minorée, bornée pour des valeurs de a ? Valeur d'un majorant, d'un minorant ?

iv. La suite semble-t-elle convergente pour certaines valeurs de a ? divergente pour certaines valeurs de a ?

2. DM

(a) Sur feuille, inscrire les formules utilisées dans la feuille de tableur.

(b) Décrire toutes les conjectures faites.

(c) Démontrez que l'équation $2 + \ln(x) = x$ admet exactement deux solutions dans $\mathbb{R}$ (que l'on appellera α et β, avec $\alpha < \beta$).

(d) Pour la valeur $a = 1$:

i. Quelles sont vos conjectures ?

ii. Démontrez toutes ces conjectures. Soyez le plus complet et le plus précis possible.

(e) Pour la valeur $a = 5$:

i. Quelles sont vos conjectures ?

ii. Démontrez toutes ces conjectures. Soyez le plus complet et le plus précis possible.

(f) Pour quelles valeurs de a avez-vous conjecturé que la suite est croissante ? Démontrez cette conjecture.

Apport TICE.

1. Aide à la compréhension d'un problème difficilement abordable sans le support TICE (ou alors avec de nombreuses indications, qui empêche l'élève de prendre du recul). Les TICE permettent ici d'envisager une "étude complète" d'une situation sans noyer l'élève dans une foultitude d'indications, de détails, d'étapes intermédiaires. L'apport espéré à long terme est une meilleure autonomie devant un problème de mathématiques (prise en compte plus systématique de tous les cas, regard plus global sur le problème proposé...)
2. Aide à prendre en compte les problèmes d'ensemble de définition ("précautions" nécessaires à prendre sur a pour que la suite soit définie).
3. Pour la rédaction des démonstrations, il s'agit d'établir des propriétés observées et non affirmées a priori par l'énoncé. Cela a plus de sens pour beaucoup d'élèves et on peut aussi espérer que quelques uns gagnent en motivation (besoin de comprendre les phénomènes observés, les différences importantes provoquées par le seul changement d'un nombre alors que tout le reste de la définition de la feuille de calcul reste le même)

Feuille tableur :

	A	B	C	D	E
1	a=	*valeur de a*			
2					
3	Indices n	Termes u_n			
4	0	$= B1$			
5	1	$= 2 + LN(B4)$			
6	2	$= 2 + LN(B5)$			
7	3	$= 2 + LN(B6)$			
⋮	⋮				

1. Il semble que pour des valeurs de a dans l'intervalle $]-\infty; \alpha_1[$ (où $\alpha_1 \approx 0{,}159$), on ne définisse pas une suite (il semble exister pour ces valeurs de a un rang n tel que $u_n \leqslant 0$, on ne peut pas alors définir u_{n+1} puisque la fonction ln n'est définie que sur $]-\infty; 0]$).

2. Il semble que pour des valeurs de a dans l'intervalle $]\alpha_1; \beta_1[$ (où $\beta_1 \approx 3{,}146$), on définisse une suite strictement croissante. Cette suite semble bornée (par 0,5 et 3,5 par exemple) et semble être convergente vers β_1.
3. Il semble que pour des valeurs de a dans l'intervalle $]\beta_1; +\infty[$, on définisse une suite strictement décroissante. Cette suite semble bornée (par 3 et u_0) et semble être convergente vers β_1. ⋆

Compétences TICE.
En regard de l'apport, les compétences TICE mises en oeuvre ici sont faibles.

1. définir et recopier une formule dans une cellule de tableur,
2. définir un graphique. ⋆

Exercice 6 (sujet 001, 2006-2007)
On définit une suite u par :

$$\begin{cases} u_0 = -7 \\ \text{Pour tout entier } n \geqslant 0,\ u_{n+1} = u_n + 4n + 6 \end{cases}$$

1. Faire une feuille de tableur qui devra afficher les premiers termes de la suite. Puis faire une représentation graphique des premiers termes de la suite par un « nuage de points ».
2. Faire alors une conjecture sur l'expression de u_n en fonction de n.
3. Contrôler la conjecture à l'aide d'une colonne supplémentaire sur la feuille de tableur.

Apport TICE.

1. Le tableur rend accessible une conjecture qui sinon serait parachutée dans l'énoncé : aide à la prise de recul, motivation de certains pour comprendre ce qui est observé.
2. Prolongement possible avec les différences secondes, le premier TP pouvant être considéré comme un « prototype » pour le cas général $u_{n+1} = u_n + an + b$. ⋆

Compétences TICE.

1. Définir une formule simple.
2. Tracer un graphe de fonction, savoir l'exploiter (certains tableurs donnent une équation d'une courbe de tendance).
$$\text{Pour tout entier naturel } n,\ u_n = 2n^2 + 4n - 7$$
3. Savoir utiliser l'outil TICE pour un premier contrôle de sa conjecture. ⋆

Exercice 7 (sujet 025, 2006-2007)
On définit une suite (u_n) par :

$$\text{Pour tout entier } n \geqslant 1,\ u_n = \frac{3}{n}\sum_{k=1}^{n} k\,(k-1)$$

1. Faire une feuille de tableur qui devra afficher les premiers termes de la suite. Puis faire une représentation graphique des premiers termes de la suite par un « nuage de points » (nuage de points sur excel, sur open office calc : diagramme XY).
Contrainte : les calculs des termes de la suite devront être faits sans utiliser la fonction SOMME *du tableur.*
2. Faire alors une conjecture sur l'expression de u_n en fonction de n.
3. Contrôler la conjecture à l'aide d'une colonne supplémentaire sur la feuille de tableur.

Apport TICE.

1. Le tableur rend accessible une conjecture qui sinon serait parachutée dans l'énoncé : aide à la prise de recul, motivation de certains pour comprendre ce qui est observé.

2. L'interdiction d'utiliser la fonction SOMME oblige à réfléchir à la relation de récurrence apparaissant dans une somme, ce qui est déjà un pas pour établir ensuite l'hérédité.
3. La traduction de la formule pour la feuille de tableur oblige à une analyse de cette formule (découpage en plusieurs colonnes correspondant à la structure algébrique de cette formule).
4. La somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k-1)$ est un exercice classique abordable sans les TICE. L'exercice (ainsi que le sujet 044 de 2006-2007 sur la somme des cubes) est donc un exercice à utiliser non en réinvestissement mais en "construction initiale" des connaissances. On peut espérer que la découverte des formules par les élèves (au contraire du parachutage classique) soit plus marquante dans le temps et permette à certains élèves de comprendre que les mathématiques ne se réduisent pas à une flopée de formules "magiques" pré-données mais sont à construire et découvrir. ⋆

Compétences TICE.

1. Savoir construire une formule complexe, savoir découper en plusieurs colonnes une formule "complexe".
2. Tracer un graphe de fonction, savoir l'exploiter (certains tableurs donnent une équation d'une courbe de tendance).

$$\text{Pour tout entier naturel } n \geqslant 1,\ u_n = n^2 - 1$$

3. Savoir utiliser l'outil TICE pour un premier contrôle de sa conjecture. ⋆

II Calculatrice

Exercice 8

On considère l'algorithme suivant :

Entrée	un entier naturel n
Traitement	affecter à u la valeur initiale 9
	Pour i prenant successivement les valeurs entières de 1 à n : affecter à u la valeur $\frac{1}{3}u + 2$ Fin du « pour i »
Sortie	Afficher la valeur de u

On note u_0 la sortie obtenue avec l'entrée $n = 0$,
on note u_1 la sortie obtenue avec l'entrée $n = 1$,
on note u_2 la sortie obtenue avec l'entrée $n = 2$,
⋮
on note u_p la sortie obtenue avec l'entrée $n = p$.

1. Déterminer u_0, u_1, u_2.
2. Exprimer u_{p+1} en fonction de u_p.
3. Écrire le programme pour votre calculatrice.
4. Faire calculer plusieurs termes de la suite. Faire des conjectures sur un éventuel majorant et un éventuel minorant de la suite. Démontrer vos conjectures.
5. On corrige le programme précédent de la façon suivante :

Entrée	un entier naturel n
Traitement	$9 \longrightarrow u$
	Pour i prenant successivement les valeurs entières de 1 à n : $\frac{1}{3}u + 2 \longrightarrow u$ Fin du « pour i » $u - 3 \longrightarrow v$
Sortie	Afficher la valeur de v

Faire une conjecture sur la nature de la suite (v_n) ainsi définie et en déduire une expression de u_n en fonction de n pour $n \in \mathbb{N}$.

Apport TICE.

1. Mise en "évidence" par une boucle du caractère itératif dans une définition par récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.
2. Facilitation des conjectures sur l'existence et la valeur de bornes. ⋆

Compétences TICE.
Sur calculatrices usuelles :

Ti	Casio
Prompt N	"N" :?→ N
$9 \to U$	$9 \to U$
For(I,1,N) $(1/3) * U + 2 \to U$ End	For $1 \to I$ To N $(1 \div 3) \times U + 2 \to U$ Next
Disp U	U

Maîtrise de la notion de boucle (un très court extrait du BO sur le programme de 1ère S : « l'élève devra mettre en oeuvre, notamment sur sa calculatrice, les notions de boucle et test. »)

Programmation récursive
Sur TI 89, Voyage 200, Ti nspire, on peut programmer la suite u définie par

$$\begin{cases} u_0 = 9 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + 2 \end{cases}$$

de la façon suivante :

$$\text{when}(n = 0, 9, 1/3 * u(n-1) + 2) \to u(n)$$

De telles définitions récursives sont possibles également sur les logiciels de calcul formel (notamment le logiciel libre et gratuit Xcas, qui présente une option "langage TI 89").

Apport TICE.
La possibilité d'une telle définition peut être une gêne (boîte noire) mais comprendre l'efficacité d'une telle écriture peut en stimuler certains (notamment dans les classes à option SI). ⋆

III Logiciel de géométrie dynamique

Exercice 9 (escargot–escalier)
Soit a un nombre réel et soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x(1-x)$.
On considère la suite u définie par

$$\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

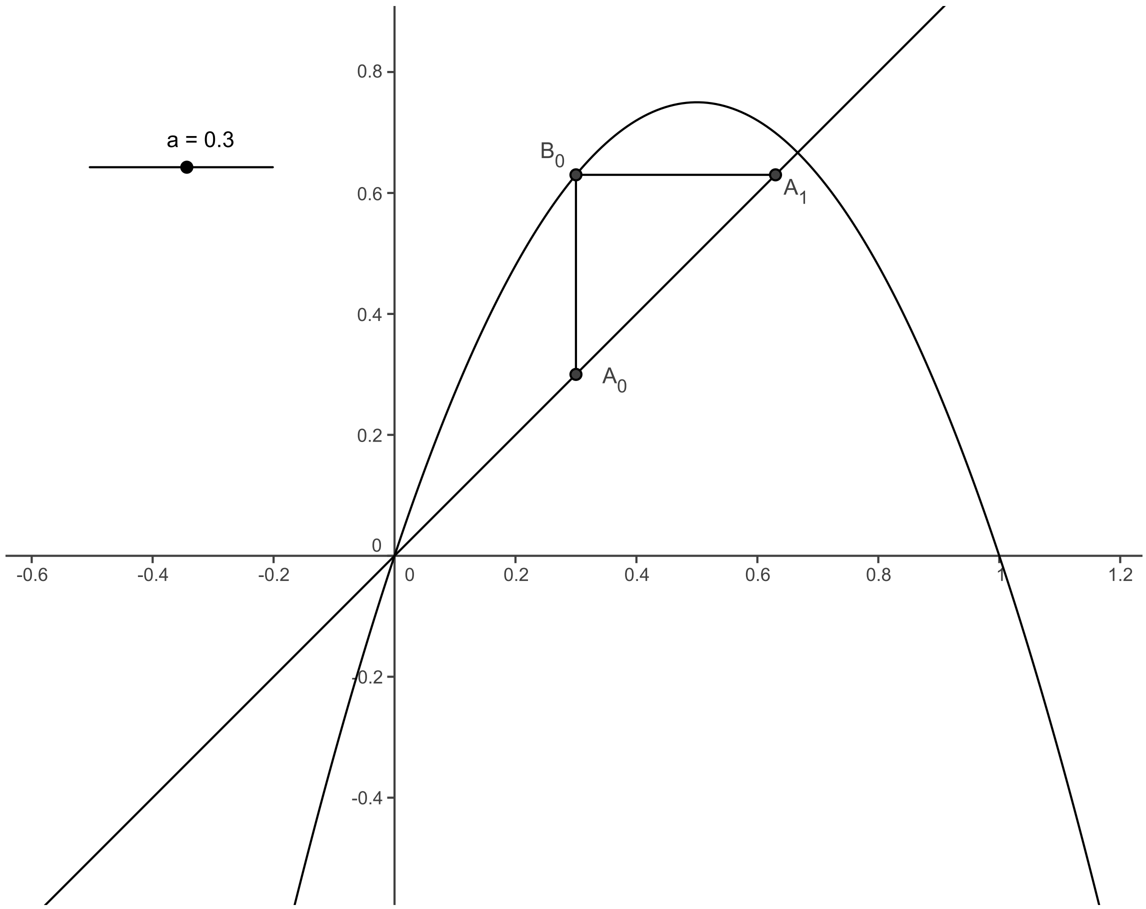
1. Dans une feuille GeoGebra, on va construire graphiquement les termes de la suite ou plus exactement les points de la suite $(A_n)_n$ où pour chaque entier n, A_n est le point de coordonnées (u_n, u_n). On construira en même temps la suite de points $(B_n)_n$ où, pour chaque entier n, B_n est le point de coordonnées (u_n, u_{n+1}).
2. (a) Construction des objets de départ.
   i. Commencer par tracer la courbe de la fonction f.
   ii. Tracer également la droite Δ d'équation $y = x$.
   iii. Construire maintenant le premier point de la suite (A_n), c'est à dire le point $A_0\,(a; a)$.

   (b) Descriptif de la méthode de construction graphique des points suivants.

i. On note $B_0\left(x_{A_0}; f\left(x_{A_0}\right)\right)$ le point de la courbe $\mathscr{C}_f$ ayant même abscisse que A_0. Le construire à l'aide de la fonction $x()$ du logiciel.

ii. En exprimant les coordonnées du point A_1 en fonction des coordonnées du point B_0, construire A_1 sur la feuille geogebra en utilisant la fonction $y()$ du logiciel.

iii. Pour visualiser la construction, tracer les segments $[A_0B_0]$ et $[B_0A_1]$.



iv. Afin de ne pas surchager la suite de la figure, effacer les noms des points B_0, A_1 et des segments $[A_0B_0]$ et $[B_0A_1]$ (clic droit sur l'objet, puis sélection de "afficher l'étiquette").

(c) Répétition du processus.

On sait maintenant construire A_1 à partir de A_0. Il est clair que l'on pourrait construire A_2 à partir de A_1 par le même processus.

Le logiciel geogebra permet d'automatiser cette tâche de répétition en créant un nouvel outil.

i. Dans le menu "outils", sélectionner "créer un nouvel outil".

ii. Désigner (à la souris) les points B_0, A_1 et les segments $[A_0B_0]$ et $[B_0A_1]$ comme objets finaux.

iii. Sélectionner la fonction f et le point A_0 comme objets initiaux.

iv. Donner un nom à votre outil et cliquer sur "fin".

v. La dernière icône dans le menu présente maintenant votre nouvel outil. Mettez le en oeuvre pour construire les points A_2, A_3 ...

3. A l'aide du logiciel, faire des conjectures sur le comportement (monotonie, convergence) de la suite suivant les valeurs de a.

Apport TICE.

1. Visualisation immédiate des conséquences d'un changement de la valeur de u_0.
2. L'application d'un "nouvel outil" (ou prototype dans le langage geoplan) consiste essentiellement à réitérer une construction déjà faite : on a donc là l'occasion de faire "vivre" une définition par récurrence.

3. Visualisation du comportement d'une suite, facilitation pour l'émission de conjectures. ⋆

Compétences TICE.

1. Savoir tracer une courbe, une droite dans un logiciel de géométrie dynamique.
2. Savoir définir une figure avec un "paramètre" (a). ⋆