
Séries numériques et séries de fonctions.

Exercice 1 (Approximation de π)

(a) Etablir que pour tout $x \in]-1,1[$, on a

$$\arctan x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}.$$

(b) Montrer que la série $\sum \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}$ converge uniformément sur $[0,1]$.

(c) En déduire que

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}.$$

(d) Combien faut-il de termes pour obtenir une approximation de π à 10^{-6} près ?

(e) Montrer que

$$\frac{\pi}{4} = 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239}.$$

Indication : en posant $a = \arctan 1/5$ *et* $b = \arctan 1/239$, *on pourra montrer que* $\tan(2a) = 5/12$ *puis* $\tan(4a) = \tan(\frac{\pi}{4} + b)$.

(f) Montrer que si $S = \frac{4}{239} + 16 \sum_{k=0}^{4} \frac{(-1)^k}{5^{2k+1}(2k+1)}$, on a

$$-3 \times 10^{-8} \leq \pi - S \leq 10^{-7}.$$

Indication : on utilisera que $11 \times 5^{11} \geq 16 \times 10^8/3$ *et* $3 \times 239^3 \geq 4 \times 10^7$.

(g) Comparer avec le résultat de (d).

Exercice 2 (Un théorème d'Abel) Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R = 1$. Pour $|z| < 1$, on pose

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

On suppose aussi que la série $\sum_n a_n$ converge et on note S sa somme.

(a) Posons $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$. Démontrer que, pour $|x| < 1$, la série de terme général $S_n x^n$ est convergente et que l'on a

$$f(x) = (1-x)\sum_{n=0}^{+\infty} S_n x^n \quad \text{et} \quad f(x) - S = (1-x)\sum_{n=0}^{+\infty}(S_n - S)x^n.$$

(b) Soit $\varepsilon > 0$. Démontrer qu'il existe alors $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $x \in [0,1[$, on ait

$$|f(x) - S| \leq (1-x)\left|\sum_{n=0}^{N_0}(S_n - S)x^n\right| + \varepsilon x^{N_0+1}.$$

(c) Démontrer que $f(x)$ tend vers S quand $x \to 1^-$.

(d) En utilisant ce qui précède, prouver que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4} \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \log 2.$$

Exercice 3 (Equivalent du reste d'une série convergente) Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ une fonction de classe C^1 vérifiant

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{f(x)} = -\infty.$$

(a) Soit $A > 0$.

(i) Montrer qu'il existe un entier N tel que, pour tout $n \geq N$ et tout $p \geq 1$, on ait

$$f(n+p) \leq f(n)e^{-pA}.$$

(ii) En déduire que la série $\sum_n f(n)$ converge et que si $R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} f(k)$ est le reste d'ordre n de la série, on a

$$0 \leq R_{n+1} \leq \frac{e^{-A}}{1-e^{-A}} f(n).$$

(iii) En déduire que $R_{n+1} = o(f(n))$, $n \to +\infty$, puis que $R_n \sim_{+\infty} f(n)$.

(b) En utilisant ce qui précède, montrer que la série $\sum_n e^{-n^2}$ converge et

$$\sum_{p=n}^{+\infty} e^{-p^2} \sim_\infty e^{-n^2}.$$

Exercice 4 (Autour de la fonction zéta de Riemann) On rappelle que la fonction zéta de Riemann est définie pour $\Re(s) > 1$ par

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}.$$

(a) Montrer que, pour tout entier $k \geq 2$, on a

$$\zeta(k) - 1 \leq \frac{1}{2^k} + \frac{1}{(k+1)2^k} \leq \frac{1}{2^{k-1}}.$$

(b) En déduire que la série $\sum_{k \geq 2}(\zeta(k) - 1)$ est convergente et que

$$\sum_{k=2}^{+\infty}(\zeta(k) - 1) = 1.$$

(c) On rappelle que la suite $(a_n)_n$ définie par

$$a_n = -\log(n) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}, \qquad n \geq 1,$$

est convergente et sa limite, notée γ, est appelée constante d'Euler. Soit $\delta_n = a_n - a_{n-1}$, $n \geq 2$.

(i) Montrer que

$$\delta_n = -\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{kn^k}.$$

(ii) Montrer que la série $\sum_n \delta_n$ converge et que sa somme est $\gamma - 1$.

(iii) En déduire que

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{\zeta(k) - 1}{k} = 1 - \gamma.$$

Exercice 5 (Un résultat d'équation diophantienne) Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ des entiers naturels non nuls premiers entre eux dans leur ensemble. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note S_n le nombre de solutions $(n_1, \ldots, n_p) \in \mathbb{N}^p$ de l'équation

$$\alpha_1 n_1 + \alpha_2 n_2 + \ldots \alpha_p n_p = n.$$

Montrer que $S_n \sim \frac{1}{\alpha_1 \ldots \alpha_p} \frac{n^{p-1}}{(p-1)!}$.
On pourra interpréter S_n comme le coefficient d'une série entière qui s'exprime simplement en fonction de $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$.

Commentaire : les références utilisées pour cette feuille sont :

1. X. Gourdon, *Les maths en tête*, 2ème édition, Ellipses : **Exercice 2**, p. 252. **Exercice 3**, p. 212. **Exercice 4**, p. 211. **Exercice 5**, p. 249.
2. A. Dufetel, *Analyse, Cours et exercices corrigés, Capes externe, agrégation interne Mathématiques*, Vuibert-CNED : **Exercice 2**, p. 310-311.