Définition d'une suite récurrente à l'aide de la fonction ln

Thèmes. fonction ln, théorème des valeurs intermédiares, suite définie par récurrence : majoration, minoration, monotonie, convergence , existence.

Classe. TS.

Logiciels. Tableur et logiciel de calcul formel (un grapheur ou geogebra par exemple, remplacerait ici sans difficulté le logiciel de calcul formel).

1 Travail sur tableur

a désigne un nombre réel.

On définit une suite u par :

$$\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = 2 + \ln(u_n) \end{cases}$$

Faire une feuille de tableur qui devra afficher les premiers termes de la suite. En essayant diverses valeurs de a, on essaiera de faire des conjectures sur le comportement de la suite en fonction du terme initial $u_0 = a$.

On pourra, pour s'aider dans cette phase de conjecture, faire tracer un « nuage de points » (c'est à dire une représentation graphique des premiers termes de la suite).

On se posera notamment les questions suivantes :

1. Définit-on ainsi une suite pour toute valeur de a ? Préciser pour quelles valeurs de a ...
2. La suite u semble-t-elle croissante pour certaines valeurs de a ? décroissante pour certaines valeurs de a ? constante pour certaines valeurs de a ?
3. La suite semble-t-elle majorée, minorée, bornée pour certaines valeurs de a ? Et dans ces situations, valeur d'un majorant, valeur d'un minorant ?
4. La suite semble-t-elle convergente pour certaines valeurs de a ? divergente pour certaines valeurs de a ?

> Pour préparer le travail de démonstration relatif aux questions concernant la suite u, on cherchera également à répondre expérimentalement à la question suivante à l'aide du logiciel Xcas :
> « Quel est le nombre de solutions de l'équation $\ln(x) + 2 = x$? Donner un encadrement des solutions. »

2 Devoir maison

1. Sur papier, inscrire les formules utilisées dans la feuille de tableur.
2. Sur papier, inscrire les formules utilisées avec Xcas et les réponses de Xcas.
3. Décrire toutes les conjectures faites.
4. Démontrez que l'équation $2 + \ln(x) = x$ admet exactement deux solutions dans $\mathbb{R}$ (que l'on appellera α et β, avec $\alpha < \beta$).
5. Pour la valeur $a = 1$:
   (a) Quelles sont vos conjectures ?

   (b) Démontrez toutes ces conjectures. Soyez le plus complet et le plus précis possible.

6. Pour la valeur $a = 5$:
   (a) Quelles sont vos conjectures ?
   (b) Démontrez toutes ces conjectures. Soyez le plus complet et le plus précis possible.
7. Pour quelles valeurs de a avez-vous conjecturé que la suite est croissante ? Démontrez cette conjecture.

3 Compétences TICE

- Formule dans une cellule de tableur.
- Tracer le graphe d'une fonction dans un tableur.
- Comprendre dans une feuille de tableur que le contenu d'une cellule peut jouer un rôle de paramètre.

4 Compétences mathématiques

1. Dans la partie observations et conjectures : essentiellement savoir faire le lien avec ce qui aura été vu en classe sur les suites $u_{n+1} = f(u-n)$ pour être capable d'affiner ses observations. On pourrait notamment attendre des élèves qu'ils recherchent d'eux mêmes, sans l'indication donnée ici, des renseignements sur les solutions de l'équation $\ln(x) + 2 = x$.
2. Pour la partie démonstration : il s'agit d'un devoir maison à donner dans une partie avancée de l'année. Doivent être maîtrisées les notions concernant le logarithme, le théorème des valeurs intermédiaires, la quasi totalité des notions relatives aux suites. J'ai utilisé ce dm en avril comme dm de révisions en analyse.

Dm sur le logarithme – Corrigé

1.

	A	B	C	D	E
1	*a*=	*valeur de a*			
2					
3	Indices n	Termes u_n			
4	0	$= B1$			
5	1	$= 2 + LN(B4)$			
6	2	$= 2 + LN(B5)$			
7	3	$= 2 + LN(B6)$			
⋮	⋮				

2. fsolve $(2+\ln(x) = x, x, 0.001, \text{newton\_solver})$ renvoie 0,158 594 339 563,
tandis que fsolve $(2+\ln(x) = x, x, 3, \text{newton\_solver})$ renvoie 3,146 193 220 62.
On peut aussi ouvrir une "session de géométrie" (avec alt+G ou avec le menu edit/ajouter/graph,geo2d) puis entrer les instructions

$$\text{graphe}\,(2+\ln(x)\,, x)\,;\text{graphe}\,(x, x)$$

pour obtenir les tracés des graphes des fonctions $x \longmapsto 2+\ln(x)$ et $x \longmapsto x$. On repère alors sur le tracé obtenu les points d'intersection des deux courbes et une approximation des abscisses de ces points.

On peut aussi demander à Xcas le tracé de la fonction $x \longmapsto 2+\ln(x) - x$ par l'instruction

$$\text{graphe}\,(2+\ln(x) - x, x)$$

et lire une approximation des abscisses des points d'intersection de la courbe obtenue avec l'axe des abscisses.

3. (a) Il semble que pour des valeurs de a dans l'intervalle $]-\infty;\alpha_1[$ (où $\alpha_1 \approx 0{,}159$), on ne définisse pas une suite : il semble en effet exister pour ces valeurs de a un rang n tel que $u_n \leqslant 0$, on ne peut pas alors définir u_{n+1} puisque la fonction ln n'est définie que sur $]-\infty;0]$.

   (b) Il semble que pour des valeurs de a dans l'intervalle $\left]\alpha_1;\beta_1\right[$ (où $\beta_1 \approx 3{,}146$), on définisse une suite strictement croissante. Cette suite semble bornée (par 0,5 et 3,5 par exemple) et semble être convergente vers β_1.

   (c) Il semble que pour des valeurs de a dans l'intervalle $\left]\beta_1;+\infty\right[$, on définisse une suite strictement décroissante. Cette suite semble bornée (par 3 et u_0) et semble être convergente vers β_1.

4. Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par

$$f(x) = 2+\ln(x) - x$$

La fonction f est dérivable sur $]0;+\infty[$, avec, pour tout $x \in]0;+\infty[$:

$$f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$$

$\lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0} 2 - x = 2$ donc

$$\boxed{\lim_{0} f = -\infty}$$

$f(x) = x\left(\dfrac{2}{x} + \dfrac{\ln(x)}{x} - 1\right)$.

Avec le théorème des croissances comparées, on a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$.

Donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2}{x} + \frac{\ln(x)}{x} - 1\right) = -1$ et

$$\boxed{\lim_{+\infty} f = -\infty}$$

x	0		1		$+\infty$
Signe de la dérivée f'	‖	$+$	0	$-$	
Variation de la fonction f	‖ $-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

(a) La fonction f est continue sur $]0;1]$, strictement croissante sur $]0;1]$ et prend des valeurs positives et des valeurs négatives sur cet intervalle (cf tableau de variations). Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires (version fonction strictement monotone), la fonction f s'annule une et une seule fois dans l'intervalle $]0;1]$.

(b) Avec les mêmes arguments, la fonction f s'annule une et une seule fois dans l'intervalle $[1;+\infty[$.

(c) Appelons α l'unique zéro de f dans l'intervalle $]0;1]$ et β l'unique zéro de f dans l'intervalle $[1;+\infty[$. Avec une machine, on constate que $f(0{,}158) < f(\alpha) < f(0{,}159)$, donc :

$$\boxed{\alpha \in]0{,}158\,;0{,}159[}$$

De même :

$$\boxed{\beta \in]3{,}146\,;3{,}147[}$$

5. $\boxed{a = 1}$

(a) Suite croissante, bornée par 1 et 4, convergente vers β.

(b) Comme nous avons remarqué sur la feuille tableur que le processus ne définissait pas toujours une suite, il faudra veiller, avant d'affirmer quoi que ce soit, à s'assurer que les objets manipulés existent bien ...Il n'est pas question de manipuler $\ln(u_n)$ si l'on n'a pas la garantie que $\ln(u_n)$ existe bien, c'est à dire que $u_n > 0$.

(c) i. Notons, pour $n \in \mathbb{N}$: $P(n)$: « u_n et u_{n+1} existent et $1 \leqslant u_n < u_{n+1} \leqslant 4$ ».

∗ Amorce.
$u_0 = 1$, $u_1 = 2 + \ln(1) = 2$. Donc $1 \leqslant u_0 < u_1 \leqslant 4$. $P(0)$ est vraie.

∗ Hérédité.
Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier pour lequel $1 \leqslant u_n < u_{n+1} \leqslant 4$.
Comme u_n et u_{n+1} sont strictement positifs, ces termes ont une image par la fonction

ln. La fonction ln conservant l'ordre sur $\mathbb{R}^{+*}$, on a (en utilisant l'hypothèse de récurrence) :

$$0 \leqslant \ln(u_n) < \ln(u_{n+1}) \leqslant \ln(4)$$

et

$$1 \leqslant 2+\ln(u_n) < 2+\ln(u_{n+1}) \leqslant 2+\ln(4)$$

soit :

$$1 \leqslant u_{n+1} < u_{n+2} \leqslant 2+\ln(4) \leqslant 4$$

$*$ Conclusion.
Avec $a = 1$, on définit bien une suite (c'est à dire : on peut calculer u_n à tout rang n) et cette suite est strictement croissante et bornée par 1 et 4.

ii. La suite u définie avec $a = 1$ est croissante et majorée d'après ce qui précède, elle est donc convergente vers une limite ℓ.

iii. La limite ℓ vérifie

$$\ell = 2+\ln(\ell) \quad \text{(continuité de la fonction } x \longmapsto 2+\ln(x)\text{)}$$

L'équation $x = 2+\ln(x)$ a deux solutions réelles : α et β. Comme u est minorée par 1, on a $1 \leqslant \ell$. Comme $\alpha < 1$, on en conclut que l'on a $\ell = \beta$.

6. $\boxed{a = 5}$

(a) Suite décroissante, bornée par 3 et 5, convergente vers β.

(b) i. Notons, pour $n \in \mathbb{N}$: $P(n)$: « u_n et u_{n+1} existent et $3 \leqslant u_{n+1} < u_n \leqslant 5$ ».

$*$ Amorce.
$u_0 = 5$, $u_1 = 2+\ln(5)$. Avec une calculatrice : $3{,}6 < 2+\ln(5) < 3{,}7$. Donc $3 \leqslant u_1 < u_0 \leqslant 5$.
$P(0)$ est vraie.

$*$ Hérédité.
Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier pour lequel $3 \leqslant u_{n+1} < u_n \leqslant 5$.
Comme u_n et u_{n+1} sont strictement positifs, ces termes ont une image par la fonction ln. La fonction ln conservant l'ordre sur $\mathbb{R}^{+*}$, on a (en utilisant l'hypothèse de récurrence) :

$$\ln(3) \leqslant \ln(u_{n+1}) < \ln(u_n) \leqslant \ln(5)$$

et

$$2+\ln(3) \leqslant 2+\ln(u_{n+1}) < 2+\ln(u_n) \leqslant 2+\ln(5)$$

d'où

$$3 \leqslant u_{n+2} < u_{n+1} \leqslant 5$$

$*$ Conclusion.
Avec $a = 5$, on définit bien une suite (c'est à dire : on peut calculer u_n à tout rang n) et cette suite est strictement décroissante et bornée par 3 et 5.

ii. La suite u définie avec $a = 5$ est décroissante et minorée d'après ce qui précède, elle est donc convergente vers une limite ℓ.

iii. La limite ℓ vérifie

$$\ell = 2+\ln(\ell) \quad \text{(continuité de la fonction } x \longmapsto 2+\ln(x)\text{)}$$

L'équation $x = 2+\ln(x)$ a deux solutions réelles : α et β. Comme u est minorée par 3, on a $3 \leqslant \ell$. Comme $\alpha < 3$, on en conclut que l'on a $\ell = \beta$.

7. Il s'agit d'établir :
   – que l'on définit une suite croissante lorsqu'on prend une valeur de a dans l'intervalle $[\alpha;\beta]$.
   – que l'on ne définit pas une suite croissante avec une valeur de a en dehors de l'intervalle $[\alpha;\beta]$.

   (a) Commençons par traiter deux cas non envisagés dans les conjectures.

      i. En posant $u_0 = \alpha$, on définit en fait une suite constante (donc croissante au sens large). En effet, on a $u_0 = \alpha$ et $u_1 = 2 + \ln(\alpha) = \alpha$...Une récurrence simple permet alors d'établir que la suite est constante.

      ii. De même, lorsque $u_0 = \beta$, la suite est constante.

   Ces deux cas étaient difficiles à envisager dans les conjectures parce qu'il aurait fallu avoir des valeurs exactes (ou au moins suffisamment de décimales exactes) de α et β pour « observer le phénomène ».

   (b) Avec une valeur $a \in]\alpha;\beta[$.

   Notons, pour $n \in \mathbb{N}$: $P(n)$: « $u_0 \leqslant u_n < u_{n+1}$ ».

   ∗ Amorce.
   $u_1 = 2 + \ln(a)$.
   Rappelons ce que l'on a obtenu sur la fonction f (cf question 4) :

x	0		α		1		β		$+\infty$
Variation de la fonction f	‖ $-\infty$	↗	0	↗	1	↘	0	↘	$-\infty$

   D'après ce tableau, on a $f > 0$ sur $]\alpha;\beta[$.
   En particulier $2 + \ln(a) - a > 0$ ce qui s'écrit aussi $u_1 > a$. Donc $P(0)$ est vraie.

   ∗ Hérédité.
   Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier pour lequel $u_0 \leqslant u_n < u_{n+1}$.
   Comme u_n et u_{n+1} sont strictement positifs, ces termes ont une image par la fonction ln.
   La fonction ln conservant l'ordre sur $\mathbb{R}^{+*}$, on a (en utilisant l'hypothèse de récurrence) :

$$\ln(a) \leqslant \ln(u_n) < \ln(u_{n+1})$$

   et

$$2 + \ln(a) \leqslant 2 + \ln(u_n) < 2 + \ln(u_{n+1})$$

   d'où

$$a < 2 + \ln(a) \leqslant u_{n+1} < u_{n+2}$$

   ∗ Conclusion.
   Avec $a = 1$, on définit bien une suite (c'est à dire : on peut calculer u_n à tout rang n) et cette suite est strictement croissante.

   (c) Envisageons maintenant le cas où $a \in]-\infty;\alpha[$. Si $a \leqslant 0$, on ne peut calculer u_1. On ne définit donc pas une suite. On peut donc supposer $a > 0$.

Lorsque $u_0 = a$, on a : $u_1 = 2+\ln(a) < a$ puisque la fonction f prend des valeurs négatives sur $]-\infty; \alpha[$. Supposons que l'on définisse une suite, c'est à dire que l'on puisse calculer u_n à tout rang n. le fait que $u_0 > u_1$ et que la fonction $x \longmapsto 2+\ln(x)$ soit une fonction conservant l'ordre sur son intervalle de définition nous permettrait alors d'établir par récurrence (sur le même modèle que les questions précédentes) que la suite u ainsi définie est une suite strictement décroissante. La suite u serait donc d'une part minorée par 0 (si l'on peut calculer u_n à tout rang n, c'est en effet qu'aucun terme n'est négatif : si l'on avait $u_{n-1} \leqslant 0$ on ne pourrait pas calculer u_n) et d'autre part décroissante. Elle serait donc convergente vers une limite ℓ. Mais cette suite décroissante de premier terme $u_0 = a$ est majorée par a et on aurait $\ell \leqslant a < \alpha$. Or si la suite u converge, sa limite ℓ vérifie $\ell = 2+\ln(\ell)$, c'est à dire $\ell = \alpha$ ou $\ell = \beta$. On a une contradiction. Ainsi on ne définit jamais une suite lorsque a est une valeur prise dans l'intervalle $]-\infty; \alpha[$.

(d) Il nous reste à envisager le cas $a \in \left]\beta; +\infty\right[$. Dans ce cas, on a $u_1 = 2+\ln(a) < u_0$ en utilisant le fait que f est strictement négative sur $\left]\beta; +\infty\right[$.

On établit alors par récurrence le fait que la suite u est strictement décroissante.