



L'objectif de ce travail est d'observer et de démontrer une propriété classique de l'hyperbole.

L'hyperbole fait partie de la famille des "coniques", et toutes les courbes de cette famille partagent cette propriété ...

A - Observations et conjectures

Ouvrez une figure Geogebra.

1. Soit H la courbe d'équation $xy = 1$. H est une "hyperbole".
Pour créer l'hyperbole H , tapez dans le champ de saisie : $H : x*y=1$
Créez un curseur q , que vous placerez dans un coin de la figure, puis créez la droite d'équation $y = -2x + q$, et renommez la d
2. Faites varier q , et observez, selon la valeur de q , en combien de points la droite d coupe l'hyperbole H .
Notez vos observations au brouillon.
3. Donnez à q une valeur pour laquelle la droite d coupe l'hyperbole H en deux points.
Créez ces deux points A et B , ainsi que leur milieu C .
Activez la trace du point C ; faites varier q et observez les positions du point C .
L'ensemble des positions de C s'appelle le *lieu géométrique* de C . On le note L .
Quelle conjecture pouvez vous formuler sur la nature de L ?
4. Faites à nouveau varier q , et observez les coordonnées du point C :
quelle conjecture pouvez vous formuler sur l'équation de L ?
5. Créez le lieu géométrique L d'après l'équation que vous avez conjecturée.
Est-ce que votre conjecture est confirmée ?

B - Calculs et démonstrations

Soit (H) l'hyperbole d'équation $xy = 1$, et (d) la droite d'équation $y = -2x + q$, où q est un réel donné.

1. De quelle fonction (H) est-elle la courbe représentative ?
En déduire l'équation du second degré que doit vérifier l'abscisse x d'un point d'intersection de (H) et (d). On notera (E_q) cette équation.
2. Pour quelle valeur de q l'équation (E_q) admet-elle une racine double ?
Est-ce que cela recoupe vos observations ? Comment pouvez vous expliquer la différence ?
Quelle est alors la position relative de la droite et de l'hyperbole ?
3. Pour quelle valeur de q l'équation (E_q) admet-elle deux racines distinctes ?
Est-ce que cela recoupe vos observations ?
On note a et b ces racines, A et B les points d'intersection correspondants.
4. Lorsqu'elles existent, calculer les racines a et b , puis leur somme et leur produit.
En déduire l'abscisse x et l'ordonnée y du milieu C de A et B .
Nota Bene : le nombre q apparaît dans les résultats de cette question.
5. Etablir une relation entre x et y , où q n'intervient pas.
Que peut-on en déduire sur l'ensemble des positions du point C lorsque q varie ?
Est-ce que cela recoupe votre conjecture sur l'équation de L ?

C - Travail sur papier

Rédigez un compte rendu de la partie A et vos réponses aux questions de la partie B.