QUELQUES COMMANDES ET SYNTAXE POUR LE CALCUL FORMEL

Quelques explications sur les boutons

Exemple pour ✓	*Exemple pour* ≈	*Exemple pour* =
1 2sqrt(3)+7sqrt(12) ✓ $2\sqrt{3}+7\sqrt{12}$	1 2sqrt(3)+7sqrt(12) ≈ **27.71**	1 2sqrt(3)+7sqrt(12) → $\sqrt{3}\cdot 16$

Manipulation des lignes

Pour faire appel à la ligne n : **$n** avec n numéro de la ligne

Pour faire appel à la ligne précédente : **#** ou **$n**

Quelques commandes

1. On peut résoudre des systèmes et des inéquations
   Résoudre(*équation* **)**
   Résoudre(in*équation* **)**
   Résoudre({*equation1,equation2,…***},{***inconnue1,inconnue2***})**
2. **Développer(** *expression* **)**
3. **Factoriser(** *expression* **)** ou **FactoriseIrr(** *expression* **)** ou **FactoriseCI(** *expression* **)**

Commande	*Résultat*
`Factoriser(x²-x-1)`	`(x²-x-1)`
`FactoriseIrr(x²-x-1)`	$\left(x+\frac{-\sqrt{5}-1}{2}\right)\left(x+\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$
`FactoriseIrr(x²+x+1)`	`x²+x+1`
`FactoriseCI(x²+x+1)`	$\left(x+\frac{-i\sqrt{3}+1}{2}\right)\left(x+\frac{i\sqrt{3}+1}{2}\right)$

4. **FormeCanonique(** *< Fonction 2d degré>* **)**
   Exemple : `FormeCanonique(2x²+7x-15)` retourne $2(x + 7/4)^2 - 169/8$.
5. Pour calculer des limites
   Limite(*<Fonction f>, <Nombre t>* **)**
   Exemple : `Limite[(x^2+x)/ x^2, +∞]` retourne *1*
6. **Substituer(** *expression, variable ,nombre ou expression* **)**
   Exemple : `Substituer[2x^2+4x+7,x,x+1]` retourne : - en tapant sur entrée `2x^2+8x+13`
   - en cliquant sur ✓ `2(x+1)^2+4(x+1)+7`
7. Pour définir un objet (qui sera aussi créé dans la fenêtre algèbre de Gegeobra et pour être utilisé n'importe où dans Geogebra) :
   Nom :=expression
8. Syntaxe de la commande Numérique (pour obtenir une valeur approchée)
   Numérique(*expression numérique, nombre de décimales***)**

Et presque toutes les autres commandes qui sont déjà en auto-complétion dans la barre de saisie.

ACTIVITE 1 : TRIPLETS PYTHAGORICIENS

Le Problème *(d'après des collègues de l'académie de Nantes)*

1. Que peut-on dire d'un triangle dont les côtés mesurent 3, 4, et 5 cm?
2. Est-ce le cas pour un triangle dont les côtés mesurent 5, 6, 7 cm?
   Des nombres entiers qui se suivent, comme dans les exemples précédents, sont appelés entiers consécutifs. Le problème que l'on se pose est le suivant :
   « Existe-t-il d'autres triplets d'entiers naturels consécutifs qui sont les longueurs d'un triangle rectangle ? »
3. **Conjecture à l'aide d'un tableur**
   a. Ouvrir le logiciel GeoGebra et afficher la fenêtre Tableur :

	A	B	C	D
1	Premier entier	Deuxième entier	Troisième entier	Différence
2	1	2	3	=A2^2+B2^2-C2^2
3				

   b. Reproduire la feuille de calcul ci-dessous :
   c. Dans la cellule A3, entrer la formule =A2+1. Puis "tirer" cette formule sur les cellules B3 et C3.
   d. Compléter la tableau automatiquement pour répondre à la question :
   Existe-t-il d'autres triplets de Pythagore dans les 100 premiers triplets ?

4. **Preuve avec le logiciel de calcul formel**
   a. On va essayer de raisonner dans le cas général en désignant les nombres par des lettres. Si on note n le premier entier du triplet, comment se notent les deux autres entiers suivants ?
   b. Ouvrir la fenêtre de calcul formel de GeoGebra.
   c. Développer l'expression $n^2 + (n + 1)^2 - (n + 2)^2$

Calcul formel

1 Développer[n^2+(n+1)^2-(n+2)^2]
→ $n^2 - 2n - 3$

   d. Savez-vous résoudre l'équation $n^2 - 2n - 3 = 0$?
   e. -1 est-il solution de cette équation ?

Substituer[n^2-2n-3,n,-1]
→ **0**

   f. Existe-t-il d'autres solutions ?
   Que répond un logiciel de calcul formel ?

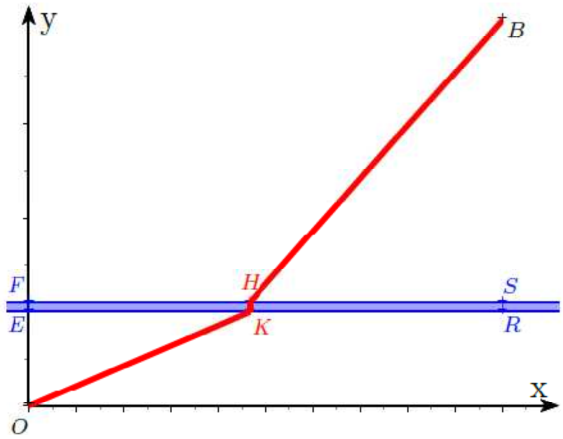
3 Résoudre[n^2+(n+1)^2-(n+2)^2=0]
→ $\{n = 3, n = -1\}$

   g. Conjecturer une factorisation de $n^2 - 2n - 3$.
   Vérifier ou réfuter votre conjecture à l'aide du calcul formel.

2 Factoriser[n^2-2n-3]
→ $(n + 1)(n - 3)$

ACTIVITE 2 : LA PASSERELLE

Une municipalité décide de relier les points $O(0;0)$ et $B(1000;410)$ par un chemin (l'unité est le mètre). Ceci nécessite le franchissement d'une rivière, large de 10 m, matérialisée par les droites (ER) et (FS), les points étant définis par leurs coordonnées $E(0;100)$, $F(0;110)$, $R(1000;100)$ et $S(1000;110)$.
Il est décidé de construire une passerelle perpendiculaire aux berges, schématisée par le segment $[HK]$, où K appartient au segment $[ER]$ et H appartient au segment $[FS]$. Le trajet pour aller de O vers B est donc $(OKHB)$.
On prend pour variable l'abscisse x du point K $(0 \leq x \leq 1000)$.



Objectif : Minimiser le coût de ce chantier.

1. Exprimer en fonction de x les longueurs OK et HB. Existe-t-il une valeur de x telle que $OK = HB$?

Le coût de construction pour les chemins $[OK]$ et $[HB]$ est de 350 euros le mètre, et le coût de la passerelle est de 45 000 euros.

2. Montrer que le coût total du chantier, noté $C(x)$, est donné par :

$$C(x) = 350\sqrt{x^2 + 10^4} + 350\sqrt{(x-1000)^2 + 9 \times 10^4} + 45\,000.$$

Calculer ce coût, à l'euro près, pour les 3 positions suivantes de K : K placé en E, K placé en R, et K milieu de $[ER]$.

3. (a) Calculer la dérivée de la fonction C.

   (b) Montrer que l'équation $C'(x) = 0$ équivaut à $x^2 + 250x - 125\,000 = 0$ et $x \geq 0$; résoudre cette équation.

   (c) Donner le tableau de variations de la fonction C sur l'intervalle $[0;1000]$; en déduire qu'il existe une seule valeur de x pour laquelle le coût total du chantier est minimum, et calculer ce minimum.

Comment modifier cet exercice pour intégrer l'utilisation de Geogebra ?

Remarque : on peut démontrer que le minimum correspond à (OK) parallèle à (HB).

Grégory BOLLARD, Frédérique BOURGEAT, Marina DIGEON, Isabelle LEYRAUD.

Activité 2 - compléments

Proposition de modification de la question 3 avec Geogebra avec le calcul formel

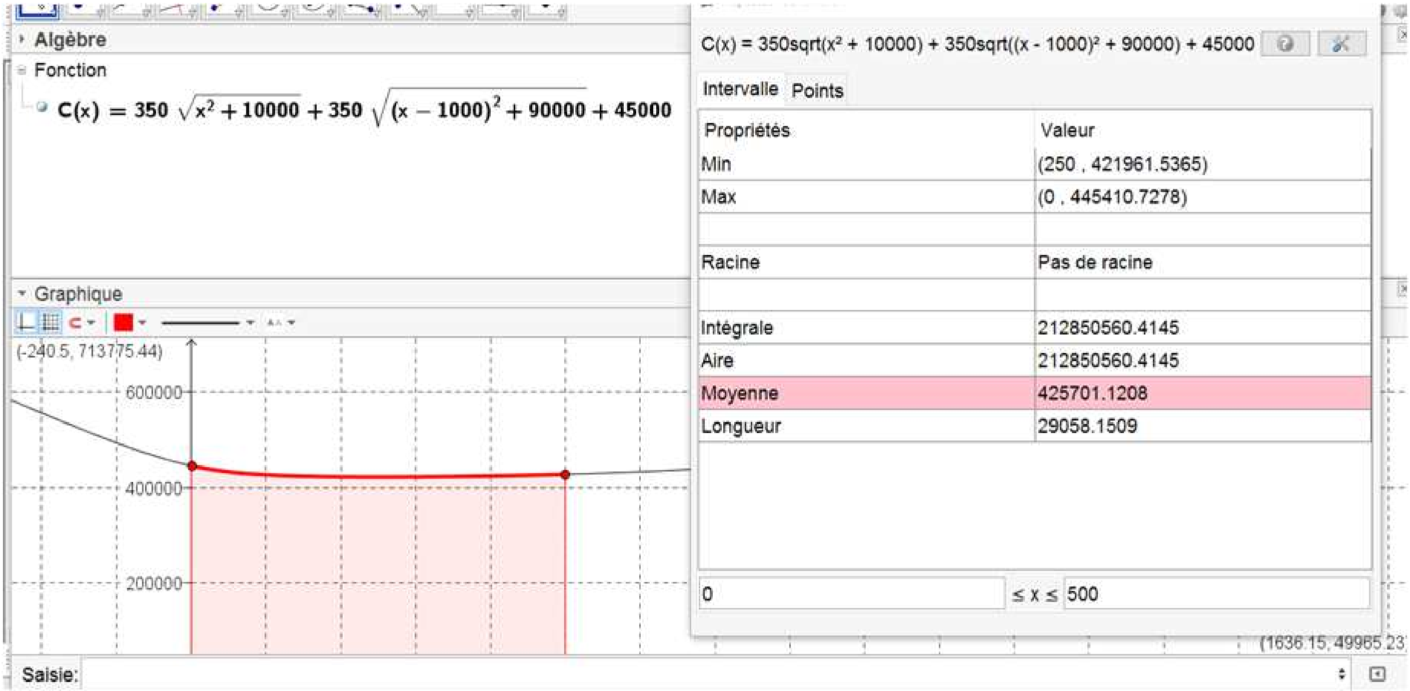
3 (a) Déterminer la dérivée à l'aide de Geogebra.

C(x) :=350….
Dérivée(C(x),x)

3 (b) Comment trouver la valeur de x qui donnera un minimum du coût et le coût minimum. Le faire à l'aide de Geogebra.

Résoudre(C'(x)=0) donne -500 et 250
Min :=C(250)
Mumérique(C(250),0) donne 421 962.

Autre possibilité : utilisation de l'inspecteur de fonction *(voir copie d'écran)*
Attention à bien valider les bornes de l'intervalle d'étude en cliquant sur entrée.



ACTIVITE 3A : VALEURS APPROCHEES D'UNE INTEGRALE

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2e^{1-x}$

1. Dresser le tableau de variations de f et tracer sa courbe représentative.
2. Interpréter graphiquement le nombre A ci-dessous.

$$A = \int_0^2 3x^2e^{1-x}\,dx$$

3. On veut encadrer ce nombre par deux entiers. Proposer une méthode graphique pour obtenir cet encadrement.

L e professeur pourra proposer un encadrement par la méthode des rectangles et affiner l'encadrement avec les élèves :

SommeRectangles(<Fonction>, <x min>, <x max>, <Nombre Rectangles>, <Position pour hauteur>)

Par exemple SommeRectangles(f,0, 2, n, **0**)= $\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n}f\left(\frac{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{n}}\right)$

Et SommeRectangles(f,0, 2, n, **1**)= $\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n}f\left(\frac{\boldsymbol{k+1}}{\boldsymbol{n}}\right)$

4. Déterminer une valeur exacte de cette intégrale à l'aide de Geogebra.
5. A l'aide d'un logiciel de calcul formel, on a obtenu une primitive de f :

$$F(x) = 3\,(-x^2 - 2x - 2)e^{-x+1}$$

Retrouver ce résultat par les calculs.

Sur Geogebra, on obtient une primitive de f avec la commande :

Intégrale(<Fonction>)

En calcul formel, on obtient toutes les primitives.

En ligne de saisie, on obtient la primitive de constante nulle.

6. Démontrer que $A = \int_0^2 3x^2e^{1-x}\,dx = 6e - \frac{30}{e}$

ACTIVITE 3B : INSPIREE DU BAC S DE JUIN 2006

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2e^{1-x}$

7. Dresser le tableau de variations de f et tracer sa courbe représentative.
8. Soit n un entier non nul. On considère l'intégrale I_n définie par :

$$\int_0^1 x^n e^{1-x}\, dx$$

   a. Calculer I_1 et I_2
   b. Etablir une relation entre I_{n+1} et I_n .

Utilisation de Geogebra pour la partie sur l'intégration

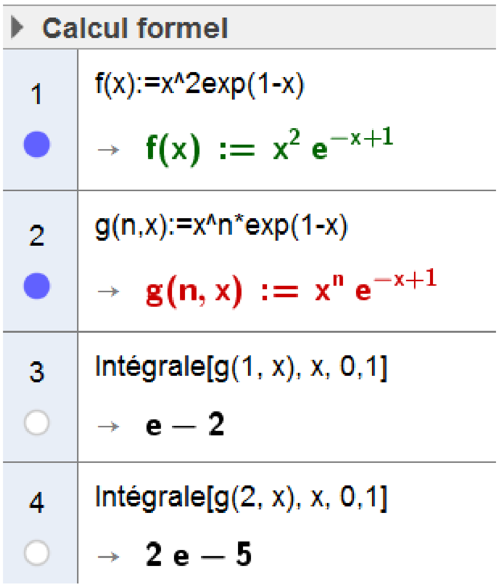
Définir la fonction f dans la fenêtre calcul formel.

Définir la fonction $g(n, x) \coloneqq x^n e^{1-x}$ dans la fenêtre calcul formel.

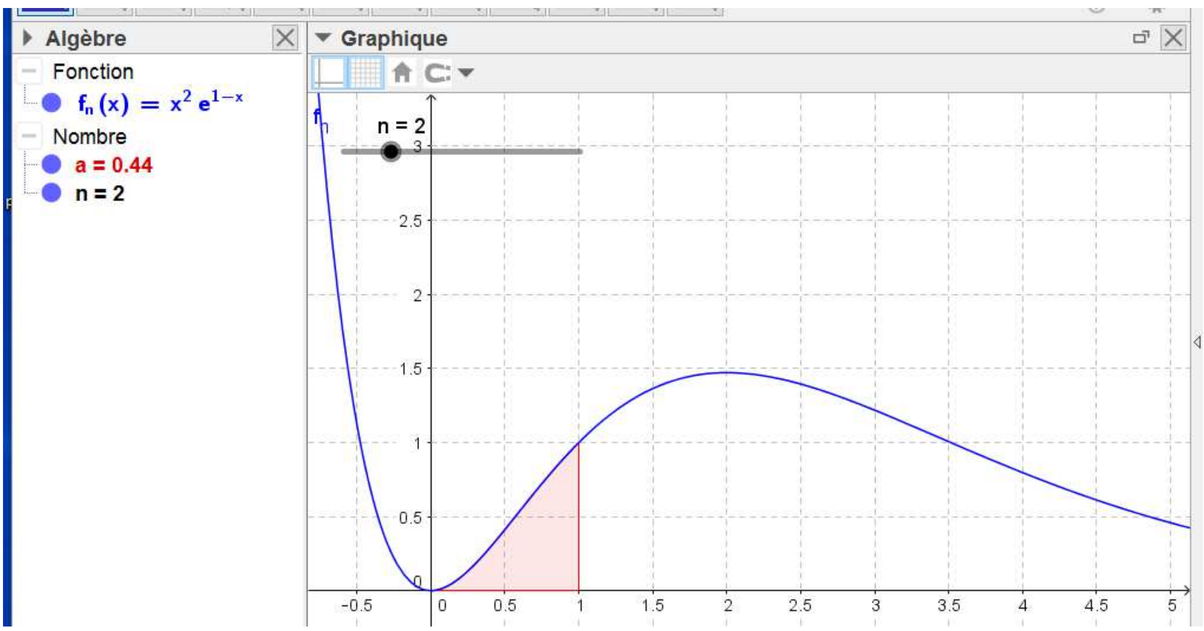
Déterminer I_1 et I_2 à l'aide de Geogebra

Conjecturer la relation entre I_{n+1} et I_n .
Les élèves peuvent calculer I_3, I_4, I_5…
Puis émettre la conjecture $I_{n+1} = (n+1)I_n - 1$

Prouver votre conjecture.
Utilisation d'une intégration par partie.



2. A l'aide de Geogebra, visualiser cette famille d'intégrale.
   Conjecturer alors le sens de variation de la suite (I_n).
   Le démontrer.



Grégory BOLLARD, Frédérique BOURGEAT, Marina DIGEON, Isabelle LEYRAUD.