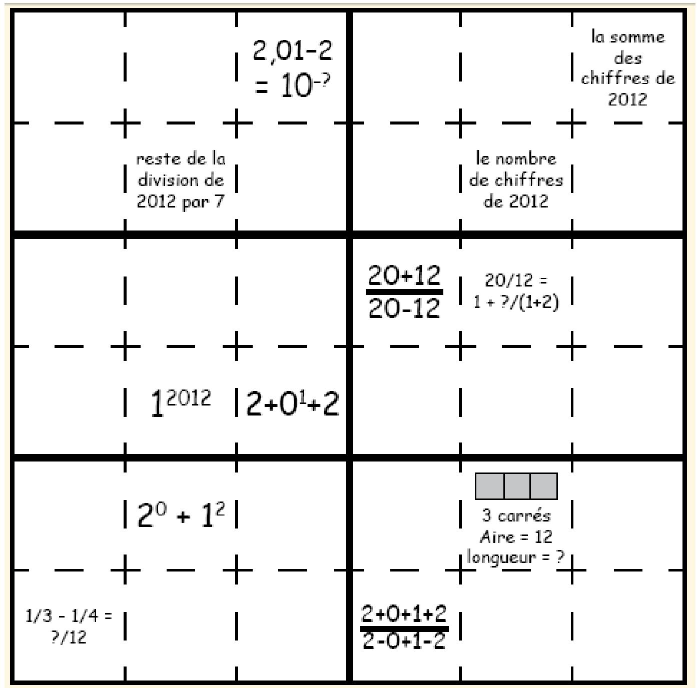
Mini-sudoku	N2	calculs	Axe 1	
Colorier des solides	N1	Géométrie dans l'espace	Axe 1	TD géo espace
Cubes en noir et blanc	N1	Géométrie dans l'espace	Axe 1	
Les solides	N1	Géométrie dans l'espace	Axe 1	
Un ballon extraordinaire	N1	Géométrie dans l'espace	Axe 1	Image affiche
Le partage du gâteau	N1	Mise en équation	Axe 1	Géogébra
Un ruban sicilien	N2	Algo	Axe 1	Algo
Arche de Noé	N1	Théorème de Pythagore	Axe 1	
En deux coups de ciseaux	N2	Théorème de Pythagore	Axe 1	
Chasse au trésor	N3	géométrie	Axe 1	
C'est bidon !	N2	Narration de recherche	Axe 1	
La pyramide tronquée	N1	Géom dans l'espace, fonctions	Axe 1/2	TD géo espace
Spirale de Luminions	N3	Théorème de Pythagore, algos	Axe 1/2	DM rallye
Le renard malin	N1	DM Rallye, scratch	Axe 2	Scratch
Morceaux de carrés	N1	Fonctions	Axe 2	Géogébra
Drôle de familles	N1	Fonction inverse, algos	Axe 2	Algobox TD
Triangle de héron	N3	Algos, fonctions	Axe 2	TD, Algobox
Carrés	N1	A revoir	Axe 2	
Triangle Original	N3	Géométrie, fonctions	Axe 2	
Des carrés qui tournent	N2	A revoir	Axe 2	Géogébra
Le Grand Huit	N2	Découpage d'aire + langue		
Une pièce de trop !	N1			
Et que fait Blanche-Neige ?	N1	*Langue*		
Blanche Neige et les sept frères	N3			

Mini-sudoku

Dans ce mini-sudoku, chaque ligne, chaque colonne et chaque région contient une fois chacun des chiffres de 1 à 6.

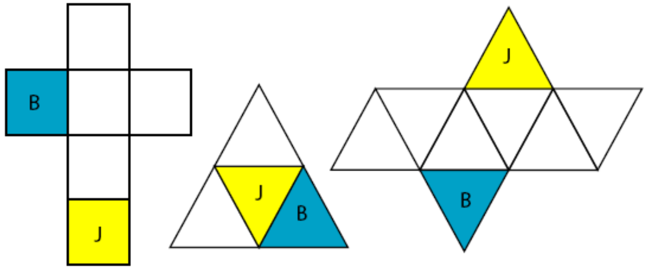
Déterminer les chiffres dissimulés par les énigmes, puis compléter la grille.



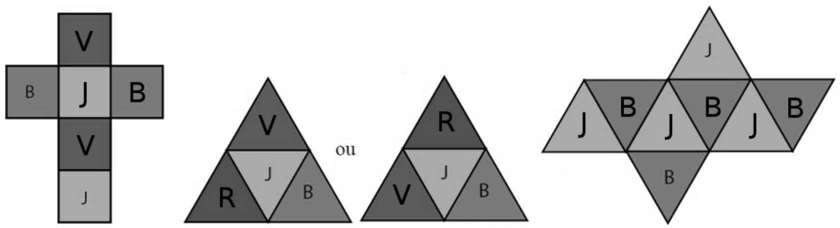
4	6	2	3	1	5
5	3	1	2	4	6
6	5	3	4	2	1
2	1	4	6	5	3
3	2	5	1	6	4
1	4	6	5	3	2

Colorier des solides

Pierre veut colorier un cube, un tétraèdre et un octaèdre de telle sorte que deux faces ayant une arête en commun n'aient pas la même couleur. Il veut aussi utiliser le moins de couleurs possibles. Il a commencé à placer sur chaque patron une face bleue et une face jaune.
S'il a besoin d'une troisième couleur, il utilisera le vert ; et ensuite le rouge puis le gris s'il a besoin de 4 ou 5 couleurs.
Colorier les patrons des 3 solides en respectant ces contraintes.

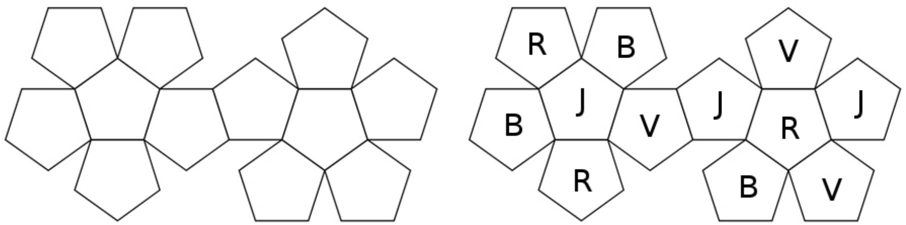


La réponse peut être obtenue par les élèves en découpant les patrons proposés.
La voici :



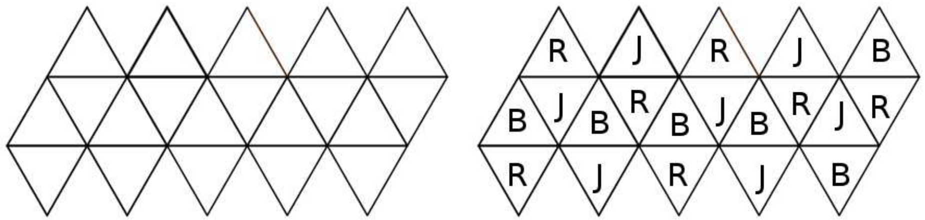
On peut en profiter pour parler des cinq solides de Platon (cube, tétraèdre, dodécaèdre, icosaèdre) en étendant l'exercice aux deux autres patrons des solides de Platon suivants :

Le dodécaèdre (avant et après coloriage)



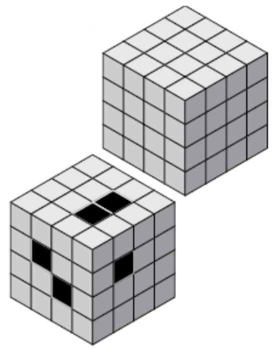
Il y a plusieurs coloriages possibles mais pas avec moins de 4 couleurs. Ce raisonnement peut facilement être fait en considérant les 6 faces constituant la 1ère fleur : une fois la face centrale coloriée en jaune (par exemple), on a besoin de trois autres couleurs.

Et avec l'icosaèdre :



Ce coloriage en trois couleurs n'est pas si facile à obtenir.
Pour un travail sur scratch, les différents patrons peuvent être obtenus à l'aide de ce logiciel et de quelques boucles répétant les motifs (carré, triangles équilatéraux ou pentagones réguliers)

Cubes en noir et blanc



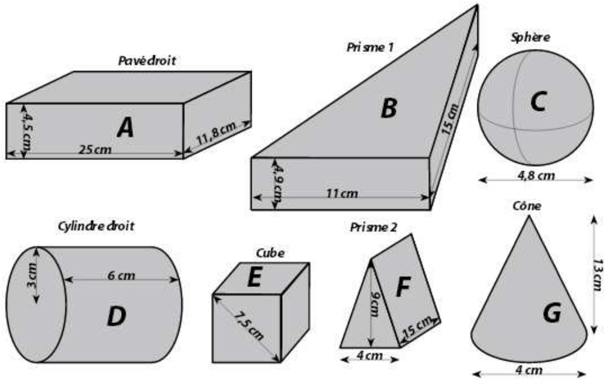
Ce cube plein, formé de petits cubes blancs identiques, pèse 320 grammes.
On remplace dans ce cube certaines rangées de 4 cubes allant d'une face à la face opposée par des cubes noirs identiques. Il pèse alors 368 grammes.
Combien pèserait un cube de la même taille formé uniquement de cubes noirs ?
Donner la réponse en grammes, et arrondir si besoin à l'entier le plus proche.

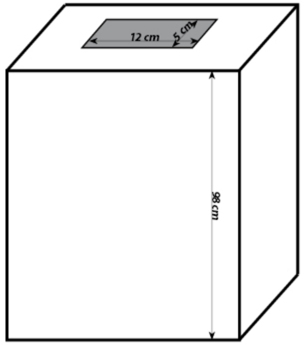
Solution

Il faut tout d'abord déterminer combien de cubes ont été retirés.
Sur la face du dessus, on voit deux carrés noirs. Ils correspondent à deux rangés de 4 cubes remplacés par des cubes noirs, soit 8 cubes.
Sur la face de gauche, on voit aussi deux carrés noirs mais pour une des deux rangées, il ne faut compter que deux cubes noirs puisque deux appartiennent déjà aux deux colonnes déjà considérées. On compte alors 6 cubes noirs de plus.
Pour le dernier carré noir situé sur la face de droite, il ne faut aussi compter que deux cubes noirs de plus en considérant le croisement avec deux des rangées précédentes.
Cela donne en tout 16 cubes noirs.
Le cube de départ pesant 368 g et contenant 4x4x4 = 64 cubes.
Chaque cube blanc pèse 368/64 = 5,75 g.
Dans le 2ème cube constitué de cubes blancs et noirs, il y a 64 – 16 = 48 cubes blancs.
Ceux-là séparément pèsent donc 48x5,75 = 276 g.
Les 16 cubes noirs pèsent donc 320 – 276 = 44 g.
Un cube tout noir pèsera donc quatre fois plus soit 176 g.

Les solides

Voici sept solides (les dessins ne sont pas à l'échelle) :

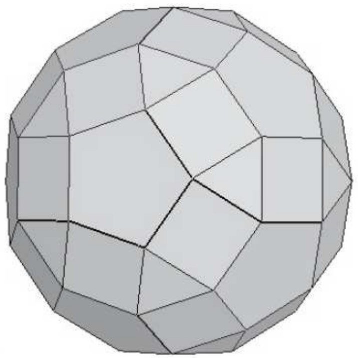




La boite ci-dessus possède une seule ouverture. Celle-ci est de forme rectangulaire, et mesure 12 cm sur 5 cm.
Indiquer pour chacun des sept solides (désigné chacun par une lettre) s'il peut ou non entrer dans la boite par cette ouverture.

A rentre : La face 4,5 sur 11,8 passe par l'ouverture 5 sur 12. (0,5 pt)
B rentre : La face 4,9 sur 11 passe par l'ouverture 5 sur 12. (0,5 pt)
C rentre : La sphère passe dans un carré de 4,8 sur 4,8, plus petit que l'ouverture 5 sur 12. (0,5 pt)
D ne rentre pas : La face circulaire a un diamètre de 6, plus grand que le 5 de l'ouverture. Et la hauteur de 6 empêche de la faire entrer latéralement. (1 pt)
E ne rentre pas : Un carré de diagonale 7,5 a un côté de mesure $7{,}5/\sqrt{2} \approx 5{,}3$ qui est plus grand que le 5 de l'ouverture. (1 pt)
F rentre : La face triangulaire 4 sur 9 passe par l'ouverture 5 sur 12. (0,5 pt)
G rentre : La face circulaire passe dans un carré de 4 sur 4, plus petit que l'ouverture 5 sur 12. (0,5 pt)

Un ballon extraordinaire

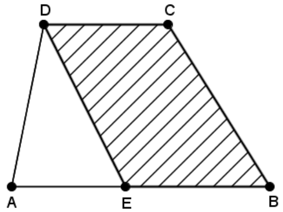


Ce ballon extraordinaire représenté ci-contre est formé de 12 pentagones réguliers entourés de carrés et de triangles équilatéraux.
Combien y a-t-il de triangles équilatéraux et de carrés?
(La disposition des faces les unes par rapport aux autres est la même sur toute la surface du ballon)

La réponse est qu'il y a 20 triangles et 30 carrés. Ce qui fait 62 faces en tout. Faire faire un patron serait donc très fastidieux à moins d'utiliser un logiciel mais peut constituer un défi à proposer à de bons élèves.

Si on fait en plus compter le nombre d'arêtes et de sommets, on obtient 120 arêtes et 60 sommets.
Ce solide est un solide d'Archimède et est appelé le rhombicosidodécaèdre.
Un solide d'Archimède est un polyèdre convexe dont les faces sont composées par au moins deux sortes de polygones réguliers (ainsi, les solides de Platon ne sont pas des solides d'Archimède). Il existe 13 solides archimédiens.

Le partage du gâteau



Les deux classes gagnantes du rallye 2013 auront à se partager en parts égales un gâteau. Celui-ci a la forme d'un trapèze ABCD dont les côtés parallèles ont pour longueurs AB = 54 cm et CD = 26 cm.

À quelle distance de A doit-on placer un point E entre A et B de façon que le segment [DE] partage le gâteau en deux parties de même aire ?

Une façon de résoudre cette énigme est de poser AE = x.
On note h la hauteur du triangle AED c'est aussi celle du trapèze ABCD et du trapèze EBCD.
L'aire du triangle AED est xh/2.
L'aire du trapèze EBCD est h(26 + 54 – x)/2 (formule du trapèze : moyenne des deux bases à multiplier par la hauteur)
Pour avoir un partage équitable, il faut : xh/2 = h(26 + 54 – x)/2
On a donc x = 80 – x donc x = 40 cm.

Un ruban sicilien

Un ruban de papier est divisé en une longue suite de cases. Un nombre entier est écrit dans la première case.
- Si le nombre est pair, on écrit sa moitié dans la case suivante.
- Si le nombre est impair, on le multiplie par 3 puis on ajoute 1 pour obtenir le nombre à écrire dans la case suivante.

Et ainsi de suite à partir du dernier nombre écrit...
Exemple :

6	*3*	*10*	*5*	*...*											

Si le premier nombre écrit est 17, quel est le 2016ème nombre écrit sur le ruban ?

Une situation
On peut donner un énoncé similaire au précédent pour les élèves :
1. Résoudre l'énigme
2. Ecrire un algorithme en langage naturel qui donne le résultat de l'énigme.

On pourra noter :

- N, le numéro de la case dont on cherche le nombre (pour l'énoncé N = 2016)
- I, le numéro écrit dans la première case (pour l'énoncé I = 17)
- U le nombre écrit dans une case de numéro donné

3. Programmer l'algorithme sur l'ordinateur pour vérifier la réponse donnée à la quest°1.
La réponse est 2.

On travaille en algorithmique la boucle pour et le test de parité à l'aide d'une instruction conditionnelle.

Un algorithme possible est :

Entrée :	Donner I Donner N
Traitement :	U prend la valeur I Pour k allant de 1 à N faire Si U est pair U prend la valeur U/2 Si U est impair U prend la valeur 3U + 1 Fin pour
Sortie :	Afficher U

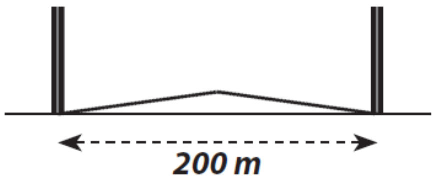
En changeant le terme initial, on peut observer que l'on retrouve encore cette série de nombres 4, 2, 1. (Conjecture de Syracuse)

Arche de Noé

Inès tend une grande corde au sol entre deux pieux séparés par 200 mètres. Son grand frère Théodore remplace entre les deux pieux l'ancienne corde par une nouvelle corde qui est plus longue que la précédente de 4 cm. La corde n'est donc plus tout à fait tendue et on peut la soulever en son milieu.

Parmi les animaux suivants, le(s)quel(s) peut-on faire passer sous la corde en la soulevant ?

La girafe (≈ 5 m) L'éléphant (≈ 3,50 m)
Le chimpanzé (≈ 1,30 m) Le koala (≈ 72 cm)
L'écureuil (≈ 13 cm)
La fourmi (≈ 2 mm)

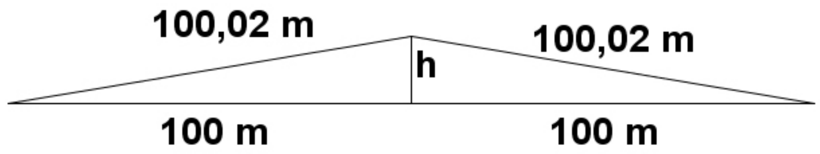


Solution

On cherche ici la hauteur du triangle isocèle. Cette hauteur h est une des trois longueurs du triangle rectangle dont les deux autres dimensions sont 100 m et 100,02 m.

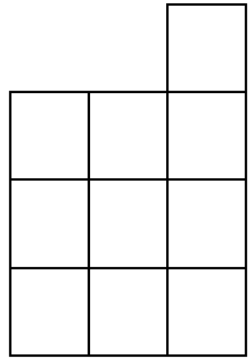
On obtient alors par le théorème de Pythagore, $h^2 = 100{,}02^2 - 100^2$ donc
$h = \sqrt{100{,}02^2 - 100^2} = \sqrt{4{,}0004} \approx 2$ m

Les animaux qui peuvent passer sont le chimpanzé, le koala, l'écureuil et la fourmi.



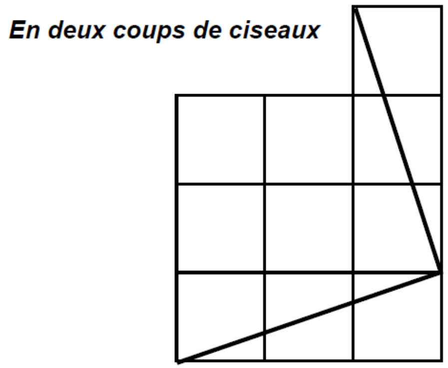
Dans ce problème, c'est bien sûr la réponse paradoxale qui est intéressante : le rajout de 4cm à la longueur totale de la corde entraîne un décalage de 2m au centre ce qui, sans calcul peut sembler surprenant.

En deux coups de ciseaux



On veut découper cette figure en deux coups de ciseaux rectilignes de façon à obtenir un carré en assemblant les morceaux obtenus.

Tracer sur la feuille réponse les traits sur lesquels on doit effectuer les deux coups de ciseau.



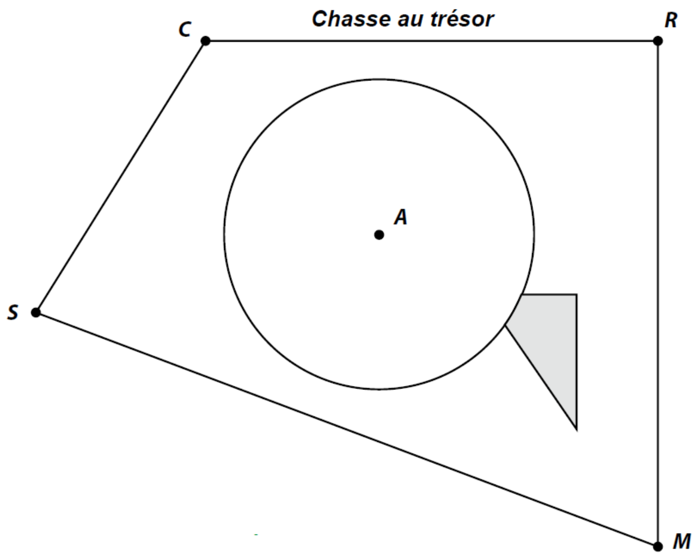
Chasse au trésor

Un trésor est caché dans une forêt en forme de quadrilatère. La carte est à l'échelle de 1/50 000.

Le trésor est :

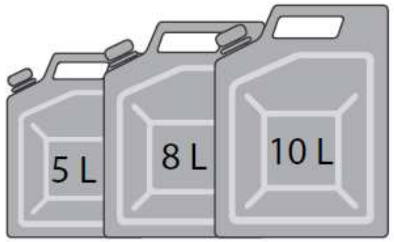
- à plus de 1500 m de l'arbre A,
- plus près de la maison M que du rocher R,
- plus près du chemin (MR) que de la rivière (MS),
- à plus de 750 m du chemin (MR).

Colorier, sur la carte, la zone où peut se trouver le trésor.



C'est bidon !

On dispose de trois bidons vides de contenances respectives 5 litres, 8 litres et 10 litres et d'aucun autre récipient. On peut prendre de l'eau au robinet, mais on souhaite ne pas la gaspiller. Les bidons peuvent être remplis et vidés autant de fois qu'on le souhaite.



Comment obtenir exactement 1 litre d'eau dans un des bidons en utilisant le moins d'eau possible ?

Indiquer le nombre minimum de litres d'eau à prendre au robinet, et expliquer la méthode par un dessin ou un texte clair.

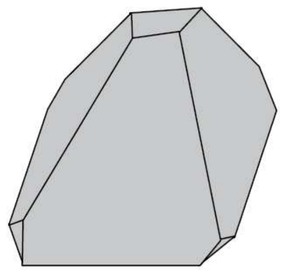
25-C'est bidon !

Nombre de litres d'eau utilisés : **11**

Exemple de solution avec utilisation de 11 L

	bidons	10	8	5	robinet
1. remplir le bidon de 8 L		0	8	0	8
2. avec celui-ci remplir celui de 5 L		0	3	5	
3. transvaser les 3 L dans le grand		3	0	5	
4. puis les 5 L dans le moyen		3	5	0	
5. compléter le moyen au robinet		3	8	0	3
6. compléter le grand avec le moyen		10	**1**	0	

La pyramide tronquée



Mathias trouve une pyramide à base carrée en bois dans le grenier de son grand-père. Les sommets de cette pyramide étant légèrement émoussés, Mathias décide de tous les couper proprement à l'aide d'une scie.

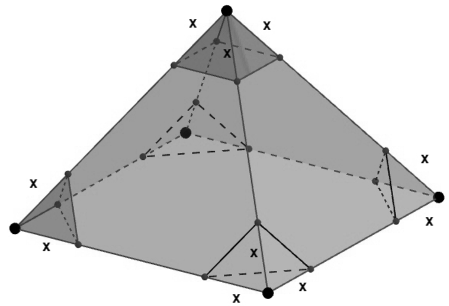
Combien le solide obtenu a-t-il d'arêtes, de sommets et de faces ?

Et sa solution :

La pyramide avant découpage compte 5 faces, 8 arêtes et 5 sommets.

Chaque découpe au niveau d'un sommet crée une face supplémentaire. Il y a donc 5+5=10 faces.

La découpe aux quatre coins de la base crée à chaque fois trois arêtes supplémentaires. La découpe au niveau du sommet principal crée quatre arêtes de plus. Il y a donc 8+3×4+4=24 arêtes.



Chaque coin de la base découpé remplace un sommet par 3 sommets. Le sommet principal découpé est remplacé par quatre sommets. Il ne reste aucun des sommets initiaux. Il y a donc 3×4+4=16 sommets.

On peut définir une fonction qui calcule le volume du solide après découpage des sommets, en notant x la distance entre le sommet et la trace de la découpe sur les arêtes qui partent du sommet en question.

On va définir une pyramide à base carré particulière, c'est-à-dire une où toutes les arêtes mesurent la même longueur. Voici un exemple d'énoncé dans ce sens :

Soit une pyramide à base carrée, avec des triangles équilatéraux comme faces triangulaires. Toutes les arêtes mesurent 8 cm. On découpe la pyramide au niveau de tous ses sommets, de façon que la distance entre chaque sommet initial et l'endroit de la découpe sur les arêtes qui en partent soit un nombre identique pour tous les sommets, noté x.

On veut étudier l'évolution du volume de la pyramide tronquée selon les valeurs de x.

1) Quelles sont les valeurs prises par x ?

2) Tracer un patron de la pyramide tronquée en vraie grandeur, avec x = 2.

3) Déterminer le volume de la pyramide avant découpage.

4) Calculer, en fonction de x la valeur :

a) du volume de la pyramide enlevée au niveau de sommet principal.

b) du volume d'une pyramide enlevée au niveau d'un des quatre coins de la base.

c) du volume restant après découpage.

5) On note V(x) le volume restant après découpage en fonction de x.

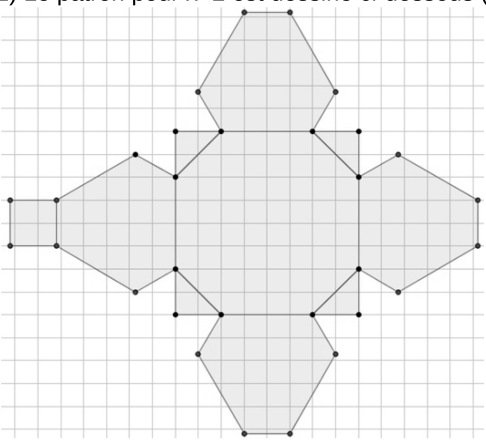
a) Tracer la courbe représentative de V dans un repère orthogonal. (Unités : 1 cm en abscisse et 10 cm en ordonnée)

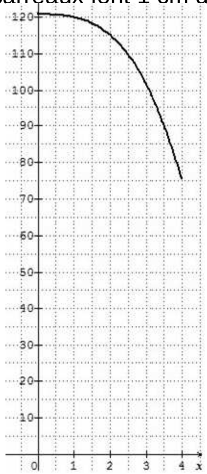
b) Déterminer le pourcentage minimum du volume initial conservé dans le solide final. (Arrondir à 1% près)

Voici une correction :

1) x peut prendre n'importe quelle valeur entre 0 et 4 cm.

2) Le patron pour x=2 est dessiné ci-dessous (les petits carreaux font 1 cm de côté) :





3) La formule du volume d'une pyramide : V = (Aire de la Base × Hauteur) / 3

La base est un carré de 8 cm de côté donc Aire de la Base = 64 cm²

La hauteur est la distance entre le centre de la base (H) et le sommet principal (S).

Le centre de la base est au milieu des diagonales de la base.

Les diagonales des carrés mesurent $8\sqrt{2}$ cm (utilisation du théorème de Pythagore). La distance entre un sommet de la base (A) et le centre est donc de $4\sqrt{2}$ cm.

La distance AS mesure 8 cm puisque les faces triangulaires de la pyramide sont équilatérales.

Comme le triangle AHS est rectangle en H, on en déduit la relation suivante à l'aide du théorème de Pythagore :

$HS^2 = AS^2 - AH^2 = 8^2 - \left(4\sqrt{2}\right)^2 = 64 - 32 = 32$ donc la hauteur mesure $\sqrt{32} = 4\sqrt{2}$ cm

Donc le volume de la pyramide initiale est : $V = \frac{64\times4\sqrt{2}}{3} = \frac{256\sqrt{2}}{3}$ cm^3

4) a) La pyramide enlevée au sommet est une réduction de la pyramide de départ, mais de côté x plutôt que de côté 8. L'aire de la base est donc x² cm², la hauteur mesure $x\frac{\sqrt{2}}{2}$ cm et le volume est donc : $V_1 = x^2 \times x\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{x^3\sqrt{2}}{6}$ cm^3

b) En regroupant deux pyramides enlevées dans deux coins opposés de la base, on reforme la pyramide enlevée au sommet. Le volume de chacune de ses pyramides est donc la moitié de V_1, c'est-à-dire $V_2 = \frac{x^3\sqrt{2}}{12}$ cm^3

c) Le volume restant s'obtient avec le calcul suivant :

$V - V_1 - 4\,V_2 = \frac{256\sqrt{2}}{3} - \frac{x^3\sqrt{2}}{6} - 4 \times \frac{x^3\sqrt{2}}{12} = \frac{(512-x^3-2x^3)\sqrt{2}}{6}$ cm^3

Et en simplifiant on obtient $\frac{(512-3x^3)\sqrt{2}}{6}$ cm^3

5) a) La courbe représentative de la fonction V définie sur [0 ; 4] par $V(x) = \frac{(512-3x^3)\sqrt{2}}{6}$ ci-dessus.

b) La fonction V est décroissante sur [0 ; 4] (logique puisque lorsque x augmente, on enlève de plus en plus de matière)

Donc la valeur minimale est obtenue pour x=4.

Pour déterminer le pourcentage du volume conservé,

il faut faire le rapport entre les valeurs $v(4)$ et $v(0)$.

$$\frac{v(4)}{v(0)} = \frac{\frac{(512-3\times4^3)\sqrt{2}}{6}}{\frac{(512-3\times0^3)\sqrt{2}}{6}} = \frac{(512-3\times64)}{(512-3\times0)} = \frac{320}{512} = 0{,}625$$

Le pourcentage du volume conservé est, au minimum, de 62,5%

« Spirale de Luminions »

Pour la fête des Lumières à Lyon, Efemera propose aux passants de participer à la fabrication d'une spirale de lumignons. Une partie de la spirale a été préparée à l'avance avec 290 lumignons, et la spirale est poursuivie tout au long de la soirée avec les lumignons fabriqués par les passants.

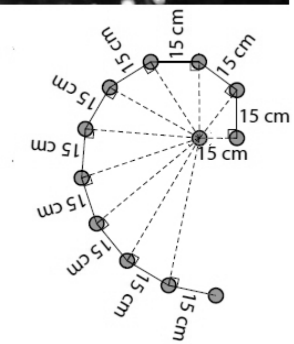
La méthode de construction de cette spirale, à l'aide de triangles rectangles dont un côté mesure 15 cm, est illustrée par la figure ci-contre. On suppose qu'elle a été rigoureusement appliquée.

Les deux premiers lumignons sont placés à 15 cm l'un de l'autre.

À quelle distance du centre a été placé le 290e lumignon pendant la préparation ? (donner la réponse en mètres et arrondir si besoin à 0,01 m près)

À la fin de la soirée, la distance entre le centre et le dernier lumignon était de 3,45 mètres.

Combien de lumignons ont été fabriqués par les passants et ajoutés à la spirale au cours de la soirée ?



On utilise le théorème de Pythagore.

Le 290$^{\text{ème}}$ est à $\sqrt{289} = 17$ (x 15 cm)

A la fin, on est à 345 cm du centre.

345 = 15 x 23 et 23² = 529 (c'est donc le 530$^{\text{ème}}$) - Il a donc été ajouté 530 – 290 = 240 lumignons.

Algorithme :

Dans le triangle T1, on peut calculer l'angle $a1$ en utilisant la trigonométrie :

$\tan(a1) = \frac{15}{15} = 1$ donc $a1 = \arctan(1) = 45°$

Dans le triangle T2, on peut calculer l'angle $a2$ en utilisant la trigonométrie :

$\tan(a2) = \frac{15\sqrt{2}}{15} = \sqrt{2}$ donc $a2 = \arctan\left(\sqrt{2}\right)$

Et ainsi de suite dans le 3[ème] triangle l'angle sera $a3 = \arctan(\sqrt{3})$

L'algorithme est donc le suivant :

En language naturel | **Avec Scratch**

n prend la valeur 1

Avancer de 15 cm

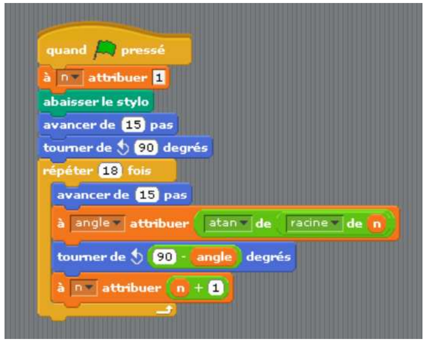
Tourner à gauche de 90°

On répète 18 fois

Avancer de 15 cm

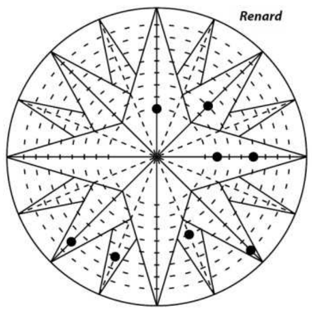
Tourner à gauche de $90 - \arctan(\sqrt{n})$ degrés

n prend la valeur n+1



Le renard malin

Dans la marine à voile ancienne, le renard est une sorte d'aide-mémoire en forme de rose des vents servant à enregistrer les caps successifs d'un bateau chaque demi-heure. Pour cela, on place une cheville dans le trou correspondant au cap suivi, sur le cercle intérieur pour la première demi-heure puis sur les cercles suivants.



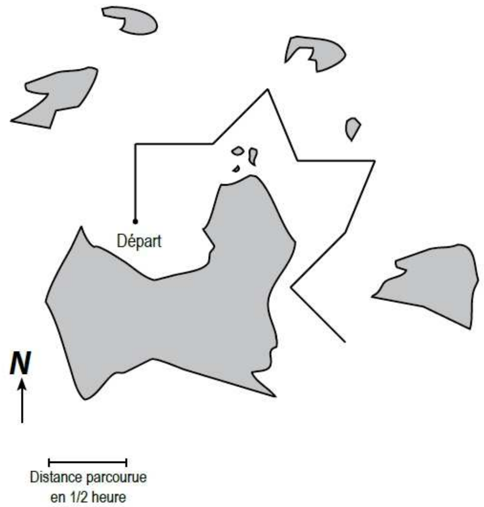
Les chevilles sont représentées par les points noirs. La première demi-heure, on s'est dirigé vers le « Nord ».

La deuxième demi-heure, le cap suivi était « Est », la troisième demi-heure, le cap était « Nord-Est »…

On supposera que la vitesse du bateau au cours de ces quatre heures a été constante.

Le segment dessiné sur la carte correspond au chemin parcouru en une demi-heure, et le point de départ du voyage est indiqué.

Dessiner l'itinéraire suivi sur la carte.



En une demi-heure, le renard parcours sur la carte 1cm. On a alors l'algorithme suivant

En language naturel | **Avec Scratch**

S'orienter à 90°

Avancer de 1 cm

Tourner à droite de 90°

Avancer de 1 cm

Tourner à gauche de 45°

Avancer de 1 cm

Tourner à droite de 112,5°

Avancer de 1 cm

Tourner à gauche de 67,5°

Avancer de 1 cm

Tourner à droite de 112,5°

Avancer de 1 cm

Tourner à droite de 22,5°

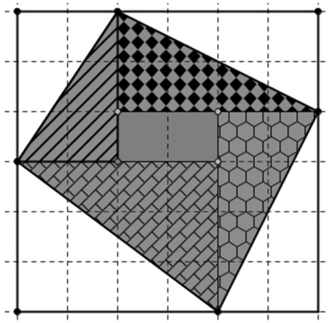
Avancer de 1 cm

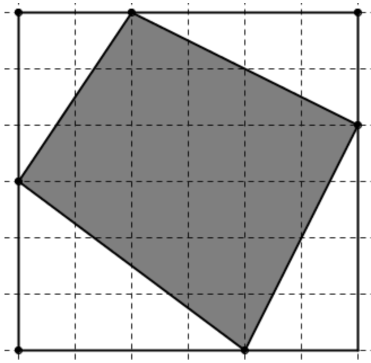
Tourner à gauche de 90°

Avancer de 1 cm

Morceaux de carrés

Quelle est la fraction du carré représentée par la partie foncée ?





Des découpages permettent de répondre à la question posée sans grande difficulté. En voici un ci-dessous. On peut aussi rassembler les carreaux de la partie non colorée qui ne sont pas entiers de façon à reconstituer des carreaux entiers.

L'aire totale est de 36 carreaux.

La différence des aires entre la partie colorée et la partie non colorée est de 2/36.

La fraction du carré représentée par la partie foncée est donc de 19/36.

A partir de cet énoncé, en voici un autre qui donne :

une situation classique d'étude de fonction polynôme du second degré.

Soit ABCD un carré de côté 6 cm.

Soit I le milieu de [AD].

M est un point du segment [AB].

On construit sur [BC] le point N tel que BN = AM puis sur [CD] le point P tel que CP = AM.

Voici une figure avec AM = 1. (dans la situation initiale, AM = 2)

1.Lorsque AM = 1, calculer l'aire du quadrilatère MNPI.

On pose AM = x.

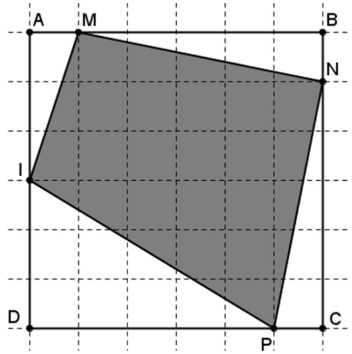
2. a) Quelles valeurs peut prendre x ? On notera I cet ensemble de valeurs.

b) Calculer l'aire du triangle AMI en fonction de x

c) Calculer l'aire du triangle MBN en fonction de x

d) Calculer l'aire A(x) du quadrilatère IMNP en fonction de x

3. Déterminer la valeur de x pour laquelle l'aire de IMNP est minimale.



Voici des éléments de réponse :

La première question permet de réfléchir à la façon de calculer l'aire en effectuant la différence entre l'aire du carré ABCD et la somme des aires des triangles rectangles : AMI, BMN, NCP et DPI.

On trouve pour AM = 1 : A(1) = 36 – (1*3/2 + 5*1/2 + 5*1/2 + 5*3/2) = 36 – 14 = 22.

Une stratégie possible est encore de reconstituer des carreaux mais c'est déjà un peu moins simple qu'avec la situation initiale.

x prend les valeurs de l'intervalle [0 ; 6].

L'aire du triangle AMI est égale à 3x/2

L'aire du triangle MBN ets égale à x(6 – x)/2

L'aire du triangle CPN est égale à celle du triangle MBN et celle du triangle DPI est égale à 3(6-x)/2

On a donc $A(x) = 36 – (1{,}5x + x(6-x)/2 + x(6 –x)/2 + 1{,}5(6 –x))= 36 – (1{,}5x + x(6-x) + 9 -1{,}5x) = 36 – (6x – x^2 + 9)$. Ainsi $A(x) = x^2 - 6x + 27$.

Pour déterminer la valeur de x pour laquelle on obtient le minimum de cette fonction, on utilise la méthode adaptée au niveau des élèves (étude graphique, étude du sens de variation de la fonction, utilisation des propriétés des fonctions polynômes du second degré ; la forme canonique de A(x) est $A(x) = (x- 3)^2 + 18$). La réponse est x = 3 que l'on pouvait deviner en considérant les propriétés de symétrie du carré.

Drôle de familles

La famille Rectangle est composée de tous les rectangles qui ont pour aire 105 m² et dont les mesures des côtés sont des nombres entiers de mètres.

Donner, en ordre croissant et en mètres, les différents périmètres des membres de la famille Rectangle.

Une fois que l'on a trouvé les dimensions des rectangles (1x105, 3x35, 5x21, 7x15) on peut donner leurs périmètres : 44, 52, 76, 212 dans l'ordre croissant.

Cette première recherche permet de travailler l'arithmétique avec les critères de divisibilité par 3 et 5 et les méthodes de recherche de diviseurs..

Piste 1 : Algorithmique

1. Compléter l'algorithme qui donne les dimensions de la famille de rectangles d'aire A donnée par l'utilisateur.

Variables	A, L, k sont des nombres entiers
Entrée	Donner A
traitement	Pour k allant de 1 à A faire Si k divise A alors L prend la valeur … Afficher « le rectangle de dimensions … et … fait partie de la famille de rectangle d'aire A. FinSi

(Réponse : L prend la valeur A/k / le rectangle de dimensions L et k fait partie de la famille de rectangle d'aire A)

2. Voici une autre proposition d'algorithme à compléter :

Variables	A, L, c, k, m sont des nombres entiers	* ENT($\sqrt{A}$) : partie entière de $\sqrt{A}$
Entrée	Donner A m prend la valeur ENT($\sqrt{A}$)* c prend la valeur 0	
traitement	Pour k allant de 1 à m faire Si k divise A alors c prend la valeur c + 1 L prend la valeur … Afficher «le rectangle n°□ □ de dimensions … et … fait partie de la famille de rectangle d'aire A ». FinSi	

Quels intérêts présentent cet algorithme par rapport au précédent ?

(L'algorithme précédent donnait deux fois les rectangles de la famille. Pour A = 105, il donnait le rectangle de dimension 1 et 105 en premier et celui de dimensions 105 et 1 en dernier. On a de plus rajouté un compteur « c » des rectangles. A la fin de l'algorithme c donne le nombre de rectangles de la famille).

3. Faire fonctionner l'algorithme en complétant le tableau donné ci-dessous et en prenant A = 156.

	A	m	k	L	c	Affichage
Entrée	156		0		0	
Itération 1	156		1			
Itération 2	156		2			
Itération 3	156					
Itération 4	156					
Itération 5	156					
Itération 6	156					
Itération 7	156					
Itération 8	156					
Itération 9	156					
Itération 10	156					
Itération 11	156					
Itération 12	156					

4. Quelles instructions peut-on rajouter pour que l'algorithme donne en plus le périmètre de chacun des rectangles ?

(Il faut ajouter la variable P initialisée à 0, puis dans la boucle ajouter les lignes P prend la valeur 2(k + L) et afficher «le périmètre du rectangle n°c est P).

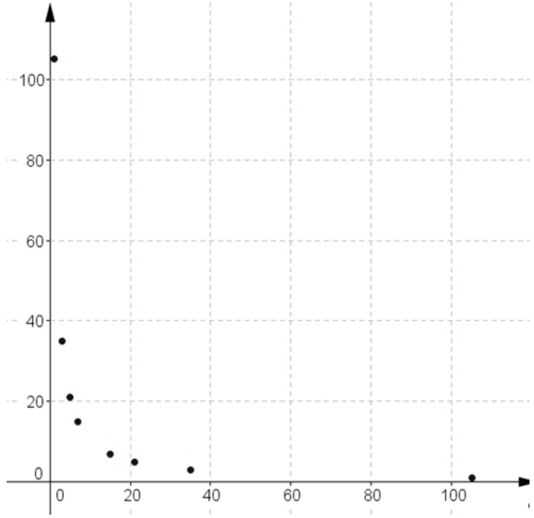
Ces algorithmes peuvent être programmés sur Algobox par exemple *(me demander les docs)*

On peut imaginer aussi une suite à l'algorithme pour que les périmètres soient donnés en ordre croissant.

Piste 2 : les fonctions homographiques

Pour travailler avec cette situation les fonctions, on peut se demander (avec les élèves) tout d'abord s'il y a une relation affine entre les dimensions. Autrement dit si les points qui ont pour coordonnées les dimensions x et y des rectangles de la famille d'aire 105 sont alignés.

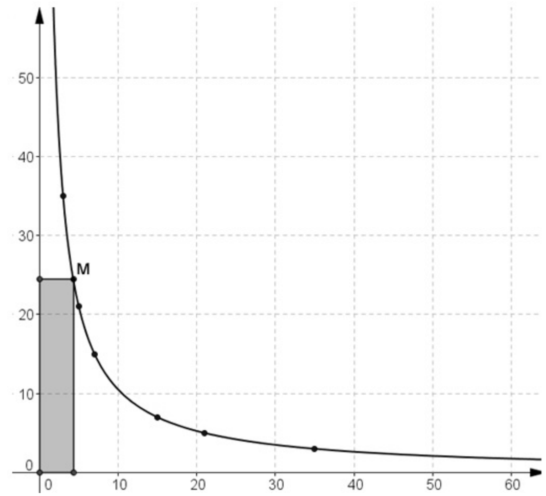
Ce n'est pas le cas bien sûr car on a y = 105/x mais cela peut nous permettre de placer les points en question dans un repère et voir que ces points ne sont pas alignés.



Il est alors naturel de vouloir relier les points.

Cela peut être l'introduction de la fonction inverse. On étudie ici sur]0 ; +∞[la fonction qui à x associe 105/x.

On peut pour bien faire comprendre le nouveau type de fonction faire apparaître le rectangle d'aire 105 associé aux points de la courbe :



0 est une valeur interdite et impossible à obtenir car il est n'est pas possible d'avoir un rectangle d'aire 105 si une des dimensions vaut 0. La décroissante se comprend aussi aisément avec cette situation.

La symétrie de cette courbe par rapport à la droite d'équation y = x vient du fait que si (x ; y) sont les dimensions d'un rectangle de la famille alors (y, x) aussi, et il s'agit du même rectangle.

Piste 3 : étude d'un autre type de fonctions

A la fin du chapitre sur les fonctions homographiques, on peut proposer l'étude d'une fonction qui n'est pas homographique mais qui est lié à ce problème : la fonction périmètre des rectangles.

Voici une proposition d'exercice :

La famille Rectangle est composée de tous les rectangles qui ont pour aire 105 m² et dont les mesures des côtés sont des nombres réels strictement positifs.

1. On note x et y les deux côtés des rectangles de cette famille et on note $f(x) = y$ la fonction qui donne la valeur de y en fonction de x. Donner la formule définissant $f(x)$:
2. Tracer C_f, la courbe représentative de f dans un repère orthonormé. On pourra choisir pour unités 0,2 cm. Que peut-on dire des variations de f ?
3. On note p la fonction qui donne la valeur du périmètre d'un rectangle de cette famille en fonction de x.
Donner la formule définissant $p(x)$.
4. Tracer C_p, la courbe représentative de p dans un repère où 1 cm correspondra à 5 unités sur l'axe des abscisses et 1 cm correspondra à 10 unités sur l'axe des ordonnées.
5. Montrer que p n'est pas une fonction homographique et étudier le sens de variation de p sur]0 ; +∞[.

Voici les éléments de réponse : $f(x) = \frac{105}{x}$ et $p(x) = 2\left(x + \frac{105}{x}\right)$.

Comme on a $p(x) = 2\left(x + \frac{105}{x}\right) = \frac{2x^2+210}{x}$, p n'est pas une fonction homographique.

Pour étudier le sens de variation de p, on peut s'adapter au niveau des élèves : étude graphique ou avec un calcul de dérivée : $p'(x) = \frac{2x^2-210}{x^2}$.

On peut aussi chercher pour quelle valeur le périmètre est minimal. C'est le rectangle qui est un carré qui donne un périmètre minimum : $p(\sqrt{105}) = \frac{420}{\sqrt{105}} = 4\sqrt{105}$

Triangle de Héron

Les trois côtés d'un triangle ABC mesurent 20 cm, 21 cm et 29 cm.
Quel est le périmètre de ce triangle (en cm) ?

La formule de Héron d'Alexandrie permet de calculer l'aire d'un triangle à partir des longueurs a, b et c de ses côtés et de son **demi**-périmètre p :

aire = $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

Quelle est l'aire du triangle ABC ? (donner la réponse en cm² et arrondir si besoin avec 1 décimale)

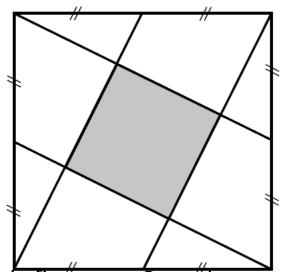
On appelle triangles «frères» deux triangles ayant le même périmètre et la même aire. Le but est de trouver un triangle «frère» du triangle ABC ayant un côté de longueur 28 cm.
Ceci peut se faire de plusieurs manières, par le calcul ou le dessin, de manière exacte ou approximative. L'utilisation de ficelle est également possible.
Dessiner un triangle «frère» du triangle ABC ayant un côté de longueur 28 cm, et expliquer votre manière de procéder dans le cadre prévu pour cela.
L'explication de votre démarche sera valorisée, qu'elle ait abouti ou non.

Triangle de Héron

De nombreuses approches sont possibles permettant d'obtenir des éléments de construction et/ou le calcul des longueurs des côtés du triangle cherché (valeurs exactes ou approximatives, obtenues directement ou par tâtonnement...).
Les valeurs exactes des longueurs des côtés du triangle cherché sont 28 cm, 17 cm et 25 cm, le pied de la hauteur (15 cm) coupant la base en 8 + 20 cm.
L'explication des méthodes de recherche était aussi importante dans la résolution que le résultat final.

Carrés

Le grand carré a pour côté 2 mètres.
Quelle est l'aire du petit carré central ?



On peut faire construire la figure sur Geogebra pour avoir une réponse.

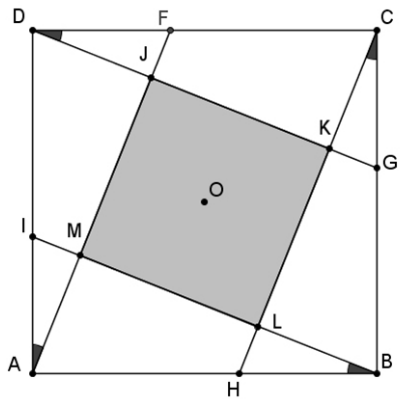
Pour la démonstration il suffit de regrouper les parties de carrés entourant le carré gris.

En observant la figure, on peut en déduire que dans le grand carré de côté 2 mètres, il y a l'équivalent de 5 carrés gris.

L'aire du grand carré est égale à 4 m²

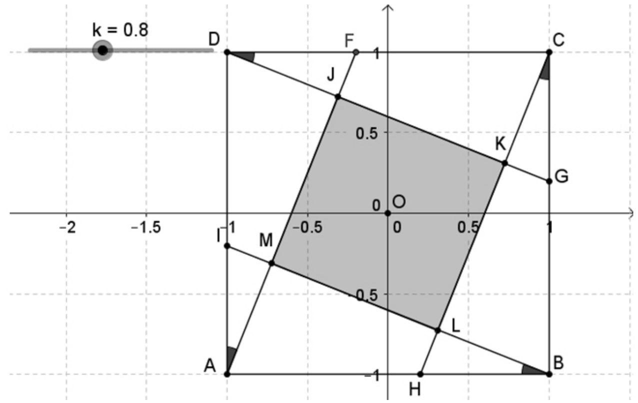
L'aire du carré gris est donc égale à $\frac{4}{5} = 0{,}8$ m².

Voici un prolongement possible de cet exercice :
On nomme ABCD le grand carré.
On note k un nombre appartenant à [0 ; 2] et on place F,G, H et I tels que
DF = CG = BH = AI = k.
On trace les droites (DG), (CH), (BI) et (AF). Les quatre points d'intersection (J, K, L et M) obtenus sont les sommets d'un carré.
On peut ***montrer que JKLM est un carré en considérant des triangles isométriques*** :
DGC et ADF sont isométriques puisque ce sont deux triangles rectangles et que DC = DA et CG = DF.
On en déduit les égalités d'angles $F\hat{A}D = G\hat{D}C$ et $D\hat{F}A = D\hat{G}C$ et ces deux couples d'angles sont complémentaires.
Ainsi, les triangles DKC et DJA sont aussi des triangles rectangles (semblables à ADF et DGC).
On en déduit que (DG) et (CH) sont perpendiculaires, de même (AF) et (DG) sont perpendiculaires.
Par les propriétés de symétrie du carré, on a alors aussi (AF) et (IB) perpendiculaires. Donc JKLM est un quadrilatère possédant trois angles droits, c'est donc un rectangle.
On en déduit aussi que les droites (AF) et (CH) sont parallèles donc les triangles DJF et DKC sont semblables.
C'est aussi le cas des triangles AIM et DAF.
Avec les égalités des longueurs de [DF], [CG] et [AI], on obtient aussi que les couples de triangles AIM et DJF d'une part et de DKC et ADJ d'autre part sont des couples de triangles isométriques.
On en déduit DJ = AM et DK = AJ donc JK = JM donc le rectangle JKLM est bien un carré.



Pour trouver l'aire du carré gris, on cherche tout d'abord l'aire du triangle rectangle DCG.
Cette aire est égale à 2k/2 = k m².
Ce triangle DCG contient les deux triangles semblables DCK et CKG qui sont aussi semblables à DCG.
Le rapport de réduction du triangle DCK au triangle CKG est DF/DC = k/2.
Le rapport d'agrandissement des deux aires est donc égal à k²/4.
Si on note A l'aire du triangle DCK, l'aire du triangle CKG est égale à $\frac{k^2}{4}A$.

L'aire du triangle DGC est égale à la somme des aires des triangles DCK et CKG.
On a donc $A + \frac{k^2}{4}A = k$ donc $A = \frac{4k}{k^2+4}$ et l'aire de CKG est égale à $\frac{k^3}{k^2+4}$ $(\times \frac{k^2}{4})$
On en déduit l'aire du quadrilatère JFCK par différence des aires des triangles DKC et DFJ (qui est un triangle isométrique à CKG).
L'aire du quadrilatère est égale à $\frac{4k}{k^2+4} - \frac{k^3}{k^2+4} = \frac{k(4-k^2)}{4+k^2}$ et l'aire du grand carré vaut 4.
L'aire du carré gris est alors égal à $4 - \left(2k + 2\frac{k(4-k^2)}{4+k^2}\right) = \frac{4k^2+16-16k}{k^2+4} = \frac{4(2-k)^2}{k^2+4}$
Pour k = 1, on retrouve la valeur $\frac{4}{5} = 0{,}8$ pour l'aire du carré gris.



On peut aussi travailler avec des équations de droites. Pour simplifier, on peut prendre pour origine du repère le centre du carré.
Dans ce repère, les points de la figure ont pour coordonnées A(-1 ;-1), B(1 ; -1), C(1 ;1), D(-1 ;1), F(-1+k;1), G(1 ;1-k), H(1-k ;-1) et I(-1 ;-1+k).
On peut à l'aide de ces coordonnées trouver les équations des droites (DG), (IB), (AF) et (CH).
Pour la droite (DG) : Le coefficient directeur est égal à $\frac{1-k-1}{1-(-1)} = \frac{-k}{2}$.
Une équation de (DG) est donc de la forme $y = \frac{-k}{2}x + p$.
D appartient à (DG) donc $1 = \frac{-k}{2}(-1) + p$ donc $p = 1 - \frac{k}{2} = \frac{2-k}{2}$.
Une équation de la droite (DG) est donc $y = \frac{-k}{2}x + \frac{2-k}{2}$.
La droite (IB) est parallèle à (DG) donc elles ont le même coefficient directeur et une équation de (IB) est donc de la forme $y = \frac{-k}{2}x + p$.
B appartient à la droite (IB) donc $-1 = \frac{-k}{2} + p$ donc $p = -1 + \frac{k}{2} = \frac{k-2}{2}$ et l'équation de la droite (IB) est $y = \frac{-k}{2}x + \frac{k-2}{2}$ (On aurait pu aussi trouver cette valeur avec le fait que O est aussi le centre du carré gris.)

De la même façon, la droite (AF) a pour équation : $y = \frac{2}{k}x + \frac{2-k}{k}$ et la droite (CH) a pour équation : $y = \frac{2}{k}x + \frac{k-2}{k}$.

(On peut aussi utiliser que les droites (AF) et (CH) sont perpendiculaires à (DG).)

Grâce à ces équations de droites, on peut trouver ***les coordonnées des sommets du carré.***
Pour trouver les coordonnées de J, point d'intersection de (DG) et (AF), on résout

$$\begin{cases} y = \frac{-k}{2}x + \frac{2-k}{2} \\ y = \frac{2}{k}x + \frac{2-k}{k} \end{cases}.$$

On en déduit que l'abscisse de J vérifie l'équation $\frac{-k}{2}x + \frac{2-k}{2} = \frac{2}{k}x + \frac{2-k}{k}x\left(\frac{2}{k}+\frac{k}{2}\right) = \frac{2-k}{2} - \frac{2-k}{k}\frac{k^2+4}{2k}x = \frac{2k-k^2-4+2k}{2k}$

On a donc $x = \frac{-(2-k)^2}{k^2+4}$ et l'ordonnée de J est égale à $y = \frac{-k}{2} \times \frac{-(2-k)^2}{k^2+4} + \frac{2-k}{2} = \frac{k(2-k)^2+(2-k)(k^2+4)}{2(k^2+4)} = \frac{-4k^2+k^3+4k+2k^2+8-k^3-4k}{2(k^2+4)} = \frac{8-2k^2}{2(k^2+4)} = \frac{4-k^2}{k^2+4}$.

Les coordonnées de J sont $J\left(\frac{-(2-k)^2}{k^2+4};\frac{4-k^2}{k^2+4}\right)$.

Par symétrie par rapport à l'origine des sommets du carré gris, on obtient les coordonnées des points K, L et M :

Les coordonnées de K sont $K\left(\frac{4-k^2}{k^2+4};\frac{(2-k)^2}{k^2+4}\right)$.

Les coordonnées de L sont $L\left(\frac{(2-k)^2}{k^2+4};\frac{k^2-4}{k^2+4}\right)$;

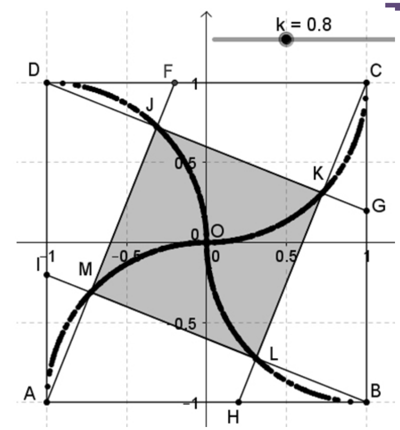
Les coordonnées de M sont $M\left(\frac{k^2-4}{k^2+4};\frac{-(2-k)^2}{k^2+4}\right)$.

On peut enfin, calculer la longueur d'un côté du carré gris au carré pour obtenir son aire :

$$\begin{aligned} JK^2 &= \left(\frac{4-k^2}{k^2+4} - \frac{-(2-k)^2}{k^2+4}\right)^2 + \left(\frac{(2-k)^2}{k^2+4} - \frac{4-k^2}{k^2+4}\right)^2 \\ &= \left(\frac{4-k^2+4-4k+k^2}{k^2+4}\right)^2 + \left(\frac{4-4k+k^2-4+k^2}{k^2+4}\right)^2 \\ &= \left(\frac{8-4k}{k^2+4}\right)^2 + \left(\frac{-4k+2k^2}{k^2+4}\right)^2 = \left(\frac{4(2-k)}{k^2+4}\right)^2 + \left(\frac{2k(-2+k)}{k^2+4}\right)^2 \\ &= \frac{(16+4k^2)(2-k)^2}{(k^2+4)^2} = \frac{4(2-k)^2}{(k^2+4)} \end{aligned}$$

Ce que l'on avait trouvé précédemment avec les triangles semblables et isométriques.
La plus value de ce calcul peut-être l'étude des lieux des sommets lorsque k varie.
Le logiciel Geogebra (ou tout autre logiciel de géométrie dynamique) permet de visualiser que ces lieux de points sont des quarts de cercle :

Étudions la trajectoire du point J. On conjecture grâce au logiciel que c'est un quart de cercle de centre E le milieu de [AD] qui a pour coordonnées (-1 ; 0)

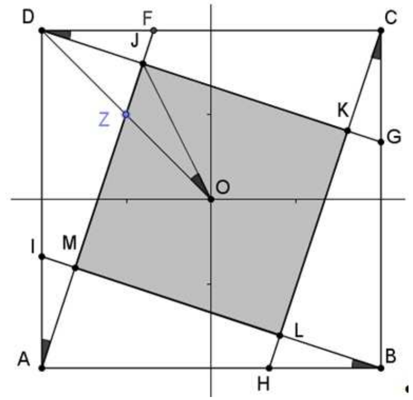


Les coordonnées du point J sont $\left(\frac{-(2-k)^2}{k^2+4};\frac{4-k^2}{k^2+4}\right)$
On calcule EJ² pour toutes les valeurs de k :

$EJ^2 = \left(\frac{-(2-k)^2}{k^2+4} - (-1)\right)^2 + \left(\frac{4-k^2}{k^2+4}\right)^2 = \left(\frac{-4+4k-k^2+k^2+4}{k^2+4}\right)^2 + \left(\frac{4-k^2}{k^2+4}\right)^2 = \left(\frac{4k}{k^2+4}\right)^2 + \left(\frac{4-k^2}{k^2+4}\right)^2 = \frac{8k^2+16+k^4}{(k^2+4)^2} = \frac{(k^2+4)^2}{(k^2+4)^2} = 1.$

J est donc bien sur le cercle de centre E et de rayon 1.

De plus en étudiant le sens de variation de la fonction qui à k associe $\frac{-(2-k)^2}{k^2+4}$ sur [0 ; 2], on peut démontrer que l'abscisse de J est croissante sur [0 ;2] et prend les valeurs de -1 à 0. Ceci confirme que le lieu de points cherché est un quart de cercle.
On a les trois autres quarts de cercles par les propriétés de symétrie des carrés.



Toute cette étude nous amène à chercher ***la transformation qui change le carré blanc en le carré gris.***
Toujours grâce au logiciel, on peut conjecturer qu'il s'agit d'une composée de deux transformations : une homothétie puis une rotation toutes les deux de centre O puisque c'est ce point qui est commun aux deux carrés donc invariant.

On retrouve le rapport de l'homothétie par les raisonnements précédents. (Il s'agit de la racine du rapport des aires des carrés) : l'homothétie est donc de rapport $\frac{2-k}{\sqrt{k^2+4}}$ et de centre 0.
Pour la rotation il faut trouver l'angle, il faut donc trouver l'angle $D\hat{O}J$ que l'on notera α.

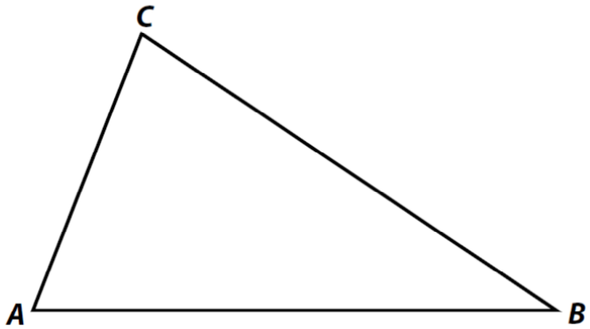
On considère les triangles DZA et JZO avec Z point d'intersection de (AF) et (DO).
Les angles $A\hat{D}Z$ et $Z\hat{J}O$ sont égaux à 45° puisque [JO] est une partie d'une diagonale du carré gris et [DZ] une partie d'une diagonale du carré blanc.
De plus les angles $D\hat{Z}A$ et $J\hat{Z}O$ sont opposés par le sommet donc sont aussi égaux.
Les triangles DZA et JZO sont donc semblables et $D\hat{A}Z$ = $Z\hat{O}J$ = $D\hat{O}J$ =α.
Dans le triangle rectangle DAF,
tan(α) = DF/DA = k/2 donc α = Arctan(k/2) : c'est l'angle de la rotation.

Triangle Original

Amélie a trouvé un triangle ABC non équilatéral dans lequel la bissectrice de l'angle Â, la médiatrice de [AB] et la hauteur issue de B sont concourantes.

Dessiner un triangle ABC non équilatéral ayant cette propriété.

Amélie regarde le triangle ci-dessous.



Elle prend ses instruments de géométrie. Par une simple mesure, et sans rien tracer, elle affirme au bout de 10 secondes que, dans ce triangle, la bissectrice de l'angle Â, la médiatrice de [AB] et la hauteur issue de B ne sont pas concourantes.

Qu'a-t-elle mesuré ?

Voici une première solution très élégante qui n'utilise que les propriétés du triangle et de ses droites remarquables.

On considère un triangle ABC quelconque.

On trace la bissectrice de l'angle BAC.

On trace ensuite la médiatrice de [AB] qui coupe la bissectrice de BAC en H. On trace alors la droite (BH).

Par propriété de la médiatrice, le triangle ABH ets isocèle et l'angle ABH est donc égal à la moitié de l'angle BAC.

Notons a = ABH (on a alors BAC = 2a et BAH = a)

Notons M le point d'intersection de (BH) et (AC).

La somme des angles du triangle AMB est égale à 180°.

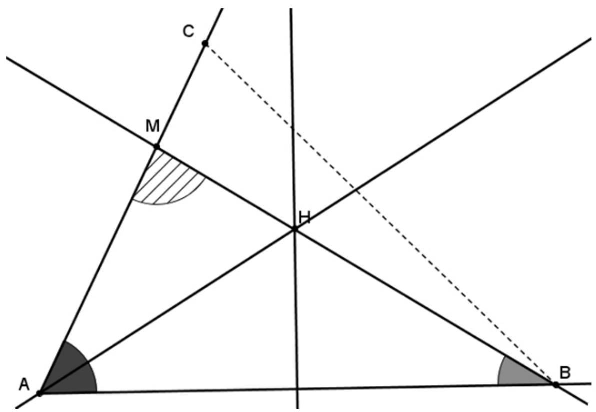
On a donc AMB = 180 – 3a.

Si on veut que la médiatrice de [AB], la bissectrice de BAC et la hauteur issue de B soinet concourantes, il faut que AMB soit un angle droit. C'est à dire que 180 – 3a = 90.

Cela donne 3a = 90 donc a = 30 donc BAC = 60°.

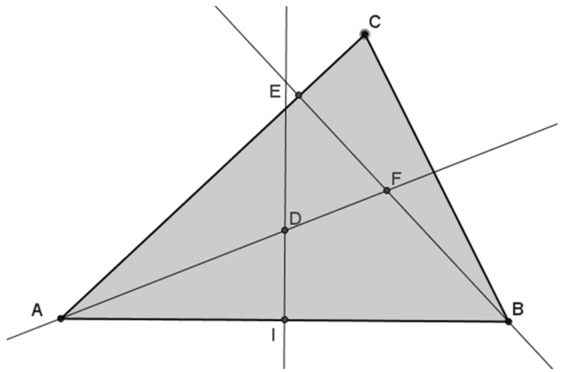
Il suffit donc d'avoir un angle de 60° pour avoir la concourance d'une bissectrice, d'une médiatrice et d'une hauteur dans un triangle. A part pour nommer les angles, le point C n'a joué aucun rôle dans la démonstration.

Cette preuve est simple pour les arguments utilisés mais elle n'est pas si simple à trouver. Il faut partir du point de vue, en construisant d'abord la bissectrice et la médiatrice et voir alors quelle contrainte cela donne si on veut que la hauteur concoure au même point que les deux autres droites.



Cet énoncé tel quel peut faire l'objet d'un travail de recherche avec les élèves. Il est intéressant pour cette recherche de permettre de trouver une conjecture de la solution à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique comme Geogebra car la démonstration elle-même n'est pas simple à trouver.

Voici une deuxième preuve qui utilise les fonctions trigonométriques. La preuve est moins élégante que la première mais fait travailler les fonctions et a l'avantage de pouvoir faire l'objet d'un exercice guidé. On pourra après l'exercice montrer aux élèves la première preuve.



Voici un énoncé possible (qui intègre la phase de conjecture sur Geogebra).

On prendra pour la recherche AB = 10 cm.

1. Construire un triangle ABC sur Géogébra.
2. Construire la bissectrice de l'angle Â, la médiatrice de [AB] et la hauteur issue de B.
3. Bouger les sommets de façon à ce que ces trois droites soient concourantes. Conjecturer une réponse à l'exercice.
4. Retransformer le triangle de façon à ce que les droites ne soinet pas concourantes. Nommer I le milieu de [AB], E le pied de la hauteur issue de B, D le point d'intersection de la bissectrice de la médiatrice tracées, F le point d'intersection de la bissectrice et de la hauteur tracée.
5. On pose α la mesure en degré de l'angle Â. Exprimer AD, AE puis AF en fonction de l'angle α. (On pourra considérer les triangles ADI, AEB et AEF).

On appelle f la fonction définie sur [0 ; 90] par $f(\alpha) = AD$

On appelle g la fonction définie sur [0 ; 90] par $g(\alpha) = AF$

6. Expliquer pourquoi on répond à l'exercice lorsque AD = AF.
7. Représenter à l'aide d'un tableur / de Geogebra / d'une calculatrice (attention les logiciels travaillent avec des radians !) les fonctions f et g.
8. Donner par lecture graphique la valeur de ⍰ pour laquelle la bissectrice de l'angle Â, la médiatrice de [AB] et la hauteur issue de B sont concourantes.
9. Retrouver la réponse par un calcul.

Voici les éléments de réponses à partir de la question 5

Dans le triangle rectangle ADI, on a $AI = \frac{AB}{2}$; $cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{AI}{AD}$ donc $AD = \frac{5}{cos\left(\frac{x}{2}\right)}$

Dans le triangle rectangle AEB, on a $cos(x) = \frac{AE}{AB}$ donc $AE = 10cos\,(x)$

Dans le triangle rectangle AEF, on a $cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{AE}{AF}$ donc $AF = \frac{AE}{cos\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{10cos\,(x)}{cos\left(\frac{x}{2}\right)}$

Ainsi, $f(x) = \frac{5}{cos\left(\frac{x}{2}\right)}$ et $g(x) = \frac{10cos\,(x)}{cos\left(\frac{x}{2}\right)}$.

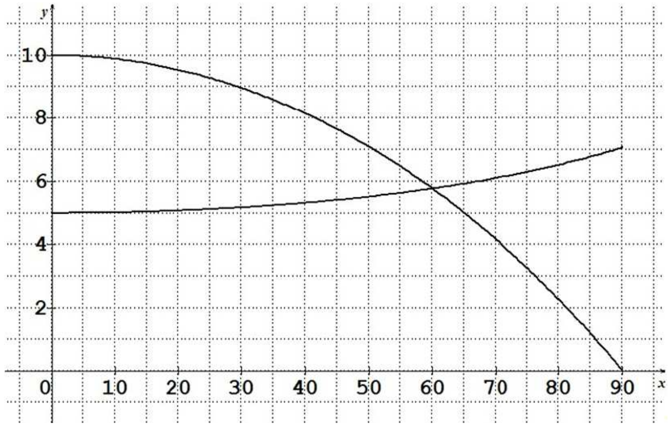
Les droites sont concourantes si et seulement si AD = AF

Si on pose l'équation avec $x \in [0; 90]$

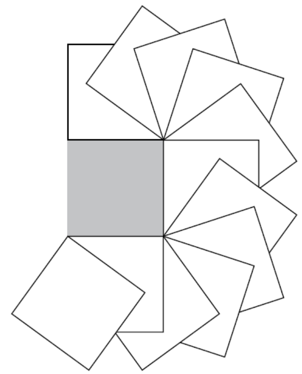
$f(x) = g(x) \frac{5}{cos\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{10cos\,(x)}{cos\left(\frac{x}{2}\right)} cos(x) = 0{,}5 x = 60$

Pour la représentation graphique, Attention :

pour les logiciels qui travaillent en radians écrire : $f(x) = \frac{5}{cos\left(\frac{\pi x}{360}\right)}$ et $g(x) = \frac{10cos\,(\pi x/180)}{cos\left(\frac{\pi x}{360}\right)}$



Des carrés qui tournent



Le carré gris est fixe et mesure 4 cm de côté.
Le carré blanc a les mêmes dimensions et «tourne» autour du carré gris jusqu'à revenir à sa position de départ.

Dessiner la trajectoire du point I centre du carré blanc.

Calculer la longueur de cette trajectoire.

Plusieurs prolongements sont envisageables ici.

Tout d'abord pour faire comprendre quelle est la trajectoire du point I, une construction sur Geogebra sera utile à de nombreux élèves. *(me demander le doc)*

On utilise des rotations successives de 180° et de centres différents : tour à tour les sommets du carré gris sont les centres de ces rotations.

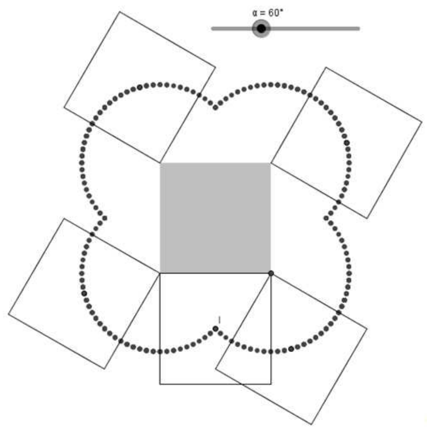
En créant un curseur correspondant à l'angle à faire varier de 0° à 180° et en activant la trace du centre I, on peut faire apparaitre la trajectoire.

Le calcul de la longueur de la trajectoire correspond à la longueur de quatre demi-cercles de rayon R où R est égal à la moitié de la diagonale d'un des carrés.

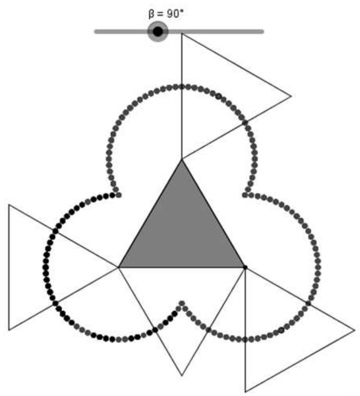
A l'aide du théorème de Pythagore, on retrouve que R = $2\sqrt{2}$.

Chaque demi-cercle mesure donc $\pi \times 2\sqrt{2}$.

La longueur de la trajectoire est donc égale à $4\pi \times 2\sqrt{2} \approx 35{,}54$ *cm*.



On peut prolonger cet énoncé en changeant la figure de base :



Par exemple, on peut étudier la même question avec des triangles équilatéraux de côté 4 cm.

On a cette fois-ci trois demi-cercles de centres respectifs les sommets du triangle équilatéral.

Les rayons de ces demi-cercles est égal au deux tiers de la hauteur du triangle équilatéral.

A l'aide du théorème de Pythagore, on peut retrouver la hauteur du triangle de côté 4cm : $2\sqrt{3}$ cm.

Le rayon des cercles est donc égal à $\frac{4}{3}\sqrt{3}$ cm.

La longueur de la trajectoire est donc égale à $3 \times \pi \times \frac{4}{3}\sqrt{3} \approx 21{,}77$ cm.

Les élèves qui n'auraient pas trouvé la solution du premier énoncé peuvent réinvestir les explications données pour résoudre le 2ème problème.

Le Grand Huit

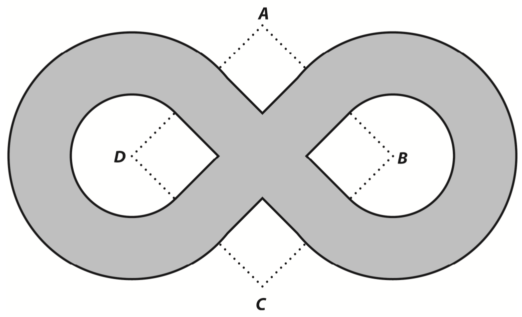
Die Ränder der Achterbahn schneiden die Seiten des Quadrats ABCD in drei gleiche Teile, und der Flächeninhalt des Quadrats ABCD ist 144 m². Welches ist der Flächeninhalt der Achterbahn?

Los bordes de la montaña rusa cortan los lados del cuadrado ABCD en tres partes iguales, y la área del cuadrado es de 144 m². ¿Cual es la área de la montaña rusa ?

I lati dell'otto volante tagliano i lati del quadrato ABCD in tre parti uguali, e la superficie del quadrato ABCD è di 144 m². Qual è la superficie dell'otto volante ?

The edges of the big dipper cut the sides of the square ABCD in three equal parts, and the surface of this square is 144 m². What is the surface of the big dipper ?

Arrondir à 0,01 prés



Solution :

Le carré a pour côté 12 m (12² = 144). La largeur du grand huit est donc de 4 m.

On découpe le grand huit en 3. La partie centrale, à l'intérieur du carré ABCD, est constituée de 5 carrés de côté 4. Cela correspond aux $5/9ème$ du carré initial. La partie centrale a donc une aire de $5 \times 16 = 90$ m²

Les deux autres parties sont symétriques donc ont la même aire.

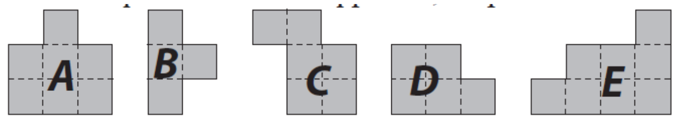
Elles sont constituées des 3/4 d'une couronne. L'aire du petit disque, de rayon 4 m, est 16π. L'aire du grand disque, de rayon 16 m, est 64π.

Les 3/4 de la couronne de gauche a donc pour aire $(64\pi - 16\pi) \times \frac{3}{4} = 36\pi$ m²

Finalement, le grand huit a une aire de $2 \times 36\pi + 90 \approx 306{,}19$ m²

Une pièce de trop !

En assemblant quatre de ces cinq pièces, on peut former un carré.



Quelle est celle qui reste ?

Solution :

7 + 4 + 6 + 5 + 8 = 30. Carré le plus proche inférieur : 25. Il faut donc supprimer D.

Et que fait Blanche-Neige ?

The seven dwarfs can cut seven trees in seven hours. Sneezy gets ill.

How long will it take the six dwarfs left to cut six trees ?

Blanche Neige et les sept fleurs

On my bedside table, there is a novel which I am now reading. This novel has a thousand pages, each one numbered from 1 to 1000. Ever since I read the tale of Snow White to her, my daughter has loved number 7. On going to bed this evening, I realised that each page with a 7 in it has been decorated by my daughter with a little seven petal flower. **How many petals has she drawn altogether ?**