5. LES ROULADES A L'ITALIENNE (Cat. 3, 4, 5)

Madame Tina a des invités pour le dîner. Elle a acheté 23 tranches de viande avec lesquelles elle prépare deux types de roulades.
Pour confectionner ses roulades, elle dispose sur chaque tranche de viande un morceau de fromage ou une petite saucisse, puis elle les enroule et les fixe avec des cure-dents.
Pour pouvoir distinguer les deux types de roulades, elle utilise deux cure-dents pour les roulades au fromage et un seul pour les roulades à la saucisse. À la fin de sa préparation, Tina a utilisé 36 cure-dents en tout.

Combien Tina a-t-elle préparé de roulades à la saucisse ?

Expliquez votre raisonnement.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : addition, soustraction, division de nombres naturels

Analyse de la tâche

- Procéder, de manière empirique, par un dessin ou avec du matériel, distribuer un cure-dent sur chacune des 23 roulades et utiliser les 13 cure-dents restants (36 - 23) pour fixer les roulades au fromage qui ont besoin de 2 cure-dents.

Ou, comprendre que si toutes les roulades étaient au fromage, on aurait besoin de 46 cure-dents (23 × 2) et alors la différence 46 – 36 = 10 représenterait le nombre de roulades avec un cure-dent, donc les roulades à la saucisse.

Ou, par un raisonnement analogue : si toutes les roulades étaient à la saucisse, on aurait besoin de 23 cure-dents et alors la différence 36 – 23 = 13 représenterait alors le nombre de roulades avec deux cure-dents, donc les roulades au fromage). Dans ce cas 23 – 13 = 10 serait le nombre de roulades à la saucisse.

Ou procéder par essais avec une hypothèse sur l'un des nombres de roulades, puis modifier progressivement les hypothèses pour arriver à la solution, Par exemple en choisissant un nombre proche de la moitié de 23, comme 11, pour les roulades à la saucisse, on aurait 12 roulades au fromage et 35 (11 + 2 x 12) cure-dents et il faudrait « ajuster le tir » en remplaçant une roulade à la saucisse (10) par une roulade au fromage (12), pour 36 cure-dents.

Il y a de nombreuses autres démarches possibles, par exemple à partir du nombre pair de cure-dents se rendre compte qu'il y a un nombre pair de roulades à la saucisse, ce qui limite le nombre des recherches…

9. ARGENT DE POCHE (Cat. 5, 6, 7)

Avec sa famille, Monique fait un séjour de trois jours à Paris. Le grand-père de Monique lui a donné de l'argent de poche pour qu'elle puisse acheter quelques souvenirs.
Le premier jour, Monique dépense la moitié de l'argent reçu de son grand-père et 1 euro de plus.
Le deuxième jour, elle dépense la moitié de l'argent qui lui reste et 1 euro de plus.
Le troisième et dernier jour, elle dépense encore la moitié de ce qui lui reste et 1 euro de plus.
Au retour, Monique a encore 2 €.

Combien d'argent de poche Monique avait-elle au départ?

Expliquez votre raisonnement.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : division, décomposition

Analyse de la tâche

- Comprendre que l'on connaît la somme restante, qu'il faut donc commencer le raisonnement par le soir du 3^{e} jour.
- Se rendre compte qu'il faut ajouter 1 à la somme restante de 2 € et multiplier ensuite par 2 pour trouver la somme du matin du 3^{e} jour

  Continuer ainsi à remonter jusqu'au matin du 1er jour, avec éventuellement un tableau du genre :

	3e jour	2e jour	1er jour
Somme en fin de journée (€)	2 (au retour)	6	14
Somme en début de journée (€)	(2 + 1) x 2 = 6	(6 + 1) x 2 = 14	(14 + 1) x 2 = 30 (au départ)

Ou partir d'une certaine somme du matin au 1er jour, faire les divisions et soustractions nécessaires, vérifier l'exactitude du résultat final et modifier la somme initiale jusqu'à tomber sur la somme de départ de 30 € qui correspond à toutes les contraintes.

11. LE RELAIS DE 11. LE RELAIS DE TRANSALPIE (Cat. 5, 6, 7, 8)

En Transalpie, chaque année a lieu une course de relais de 99 km.
Chaque équipe est composée d'au moins deux coureurs.
Dans chaque équipe, un coureur parcourt un nombre entier de kilomètres avant de passer le témoin au suivant.
Le coureur qui reçoit le témoin doit courir exactement 1 km de plus que celui qui l’a précédé.
On peut constituer des équipes, avec un nombre différent de coureurs. Les 99 km du parcours sont répartis selon le nombre de coureurs de l’équipe.
Par exemple on peut former une équipe de trois coureurs : le premier parcourt 32 km, le deuxième 33 et le troisième 34, ce qui donne bien 32 + 33 + 34 = 99.

Combien peut-il y avoir de coureurs dans une équipe ?

Trouvez toutes les possibilités et indiquez les distances parcourues par chacun des coureurs de chaque équipe possible.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : opérations, décomposition d’un nombre en somme de nombres naturels consécutifs

Analyse de la tâche

- Transcrire la situation au niveau mathématique : il s’agit de trouver des décompositions de 99 en sommes de nombres naturels consécutifs et de se demander pour quels nombres de termes elles existent.
- La solution en deux termes, 49 + 50 = 99, est possible et facile à trouver, par exemple à partir de 50 (moitié de 100),

  la solution en trois termes, 32 + 33 + 34 est donnée,

  pour quatre termes, on peut travailler par approximations successives ou en partant directement de nombres proches de 25 (quart de 100) : 23 + 24 + 25 + 26 = 98 est trop petit, 24 + 25 + 26 + 27 = 102 est trop grand et il faut conclure qu’il ne peut pas y avoir d’équipes de quatre coureurs d’équipes, ,

  pour cinq termes, il n’y a pas non plus de solution ; on trouve en revanche une solution en six termes, en neuf termes et en onze termes. Au total, il y a 5 décompositions de 99 en sommes de nombres naturels consécutifs et donc **5 possibilités pour la formation des équipes :**

  2 coureurs : 49 + 50 = 99 | **6 coureurs : 14 + 15 + 16 + 17 + 18 + 19 = = 99**

  3 coureurs : 32 + 33 + 34 = 99 | **9 coureurs : 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 = 99**

  11 coureurs : 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 = 99
- De nombreuses autres procédures permettent de trouver les cinq décompositions, mais font appel à une maîtrise plus élevée des propriétés des opérations. Par exemple : partir des sommes des premiers nombres naturels 1 + 2 = 3 ; 1 + 2 + 3 = 6 ; 1 + 2 + 3 + 4 = 10, etc, les soustraire de 99 et voir si la différence est un multiple de 2, de 3, de 4, etc ; ou constater que tous les nombres impairs sont la somme de deux nombres consécutifs, que les multiples de 3, 5, 7, … sont la somme respectivement de 3, 5, 7, … nombres consécutifs, etc.

13. LE CHIEN ET LE R13. LE CHIEN ET LE RENARD (Cat. 7, 8, 9, 10)

Le chien Toby poursuit son ami Red le renard dans les bois. Il parcourt 85 mètres en 5 secondes tandis que Red parcourt 104 mètres en 8 secondes. Quand la poursuite a commencé, la distance entre les deux était de 320 mètres.

Combien de temps faudra-t-il à Toby pour rattraper Red ?

Expliquez votre raisonnement.

ANALYSE A PRIORI

Domaines de connaissances :

- Arithmétique : opérations dans **N**
- Mesures : distance, temps et vitesse
- Algèbre: équation du premier degré

Analyse de la tâche

- Pour les élèves qui ne maîtrisent pas le concept de vitesse, la procédure doit suivre l'écoulement du temps, seconde par seconde, après avoir transformé les données « 85 mètres en 5 secondes » et « 104 mètres en 8 secondes », respectivement en 17 et 13 mètres en une seconde, (ou 40 secondes par 40 secondes, ppmc de 8 et 5). On peut alors élaborer une progression comparée des animaux et de leur écart. Par exemple :

temps (s)	0	1	2	…	10	20	…	40	…	80
distance chien (m)	0	17	34	…	170	340	…	680	…	1360
distance renard (m)	0	13	26	…	130	260	…	520	…	1040
rattrapage (m)	0	4	8	…	40	80	…	160	…	320
écart (m)	320	316	312		280	200	…	160	…	0

Ou, se rendre compte, après avoir transformé les vitesses en m/s, que le chien rattrape 4 mètres par seconde et qu'il lui faudra 80 secondes (320 : 4) pour rattraper le renard, ou 1 minute et 20 secondes

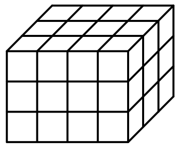
Ou, algébriquement, les distances parcourues en x secondes par le chien ($17\,x$) et le renard ($13\,x$) en mètres conduisent à l'équation $320 = 17\,x - 13\,x$ et à sa solution $x = 80$ (en secondes) ou 1 minute et 20 secondes (les trois distances peuvent être représentés graphiquement).

(Pour le physicien, la relation entre vitesse, distance et temps sous la forme $d = vt$, permet de transcrire directement la différence des distances parcourues par le chien et le renard par l'équation

$(85/5)t - (104/8)t = 320$)

16. TOURS DE 36 CUBES (Cat. 8, 9, 10)

Chaque élève d'une classe dispose de 36 cubes pour construire une « tour » en forme de brique (ou parallélépipède rectangle), sans trous.
André a construit une tour formée de trois étages rectangulaires de 4 cubes sur 3 cubes. (fig. 1) Boris doit encore placer deux cubes, sa construction n'aura qu'un seul étage (fig 2)
Claudia est arrivée, après plusieurs essais, à construire une tour de 36 étages, qui risque de s'écrouler si on la touche.



fig, 1 Construction d'André

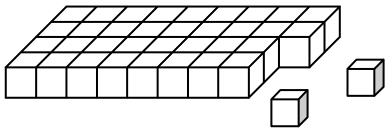


fig. 2. Construction de Boris

Chaque élève compte les faces des cubes de sa tour qu'il peut voir : celles de dessus et des côtés.
Par exemple André peut voir 54 faces : 12 devant, 12 derrière, 12 dessus, 9 à gauche et 9 à droite.
Lorsque Boris aura terminé sa tour, il pourra voir 62 faces de cubes : 36 dessus, 9 devant et 9 derrière, 4 à gauche et 4 à droite.
Daniel remarque que sa tour a le même nombre de faces visibles que celle de Gabriel, mais qu'elle a trois étages de plus.

Combien d'étages ont les tours de Daniel et de Gabriel ?

Expliquez comment vous avez trouvé vos réponses.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : opérations dans **N**, décomposition d'un nombre entier en produit de 3 facteurs,
- Géométrie : rectangle (aire et périmètre) ; parallélépipède rectangle (volume et aire latérale)

Analyse de la tâche

- Comprendre que, pour trouver les briques des deux élèves, il faut envisager toutes les tours possibles de 36 cubes, en forme de parallélépipède rectangle en fonction de la « base » (face inférieure non visible) et chercher les cas où deux tours ont le même nombre de faces visibles et trois étages de différence.

  Voici cet inventaire, organisé seulement pour les tours ayant 3 étages de différence avec une autre :

étage	base	périmètre de base	aire latérale	nombre de faces visibles
12	3 x 1 = 3	(3 + 1) x 2 = 8	8 x 12 = 96	96 + 3 = 99
9	4 x 1 = 4	(4 + 1) x 2 = 10	10 x 9 = 90	90 + 4 = 94
9	2 x 2 = 4	(2 + 2) x 2 = 8	8 x 9 = 72	72 + 4 = 76
6	6 x 1 = 6	(6 + 1) x 2 = 14	14 x 6 = 84	84 + 6 = **90**
6	3 x 2 = 6	(3 + 2) x 2 = 10	10 x 6 = 60	60 + 6 = 66
4	9 x 1 = 9	(9 + 1) x 2 = 20	20 x 4 = 80	80 + 9 = 89
4	3 x 3 = 9	(3 + 3) x 2 = 12	12 x 4 = 48	48 + 9 = 57
3	12 x 1 = 12	(12 + 1) x 2 = 26	26 x 3 = 78	78 + 12 = **90**
3	6 x 2 = 12	(6 + 2) x 2 = 16	16 x 3 = 48	48 + 12 = 60
3	4 x 3 = 12	(4 + 3) x 2 = 14	14 x 3 = 42	42 + 12 = 54
1	36 x 1 = 36	(36 + 1) x 2 = 74	74 x 1 = 74	74 + 36 = 110
1	18 x 2 = 36	(18 + 2) x 2 = 40	40 x 1 = 40	40 + 36 = 76
1	12 x 3 = 36	(12 + 3) x 2 = 30	30 x 1 = 30	30 + 36 = 66
1	9 x 4 = 36	(9 + 4) x 2 = 26	26 x 1 = 26	26 + 36 = 62
1	6 x 6 = 36	(6 + 6) x 2 = 24	24 x 1 = 24	24 + 36 = 60

  On trouve 15 tours et il y a 4 couples de nombres égaux de faces visibles :

  54 57 **60** **60** 62 **66** **66** **76** **76** 89 **90** **90** 94 99 110

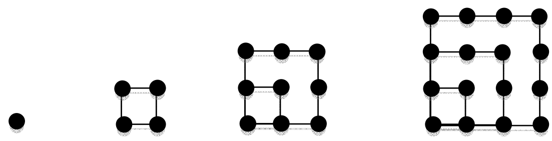
  mais seulement un cas où une brique a 3 étages de plus que l'autre : 90 et 90 pour les briques de 6 étages (Daniel) et 3 étages (Gabriel).

20. NOMBRES POLYGONAUX (Cat 10)

Les nombres carrés sont appelés ainsi parce qu'ils peuvent être représentés au moyen de points disposés à équidistance sur les côtés de carrés superposés

Voici les quatre premiers nombres carrés :

1, 4, 9 et 16, de rangs respectifs 1, 2, 3 et 4.

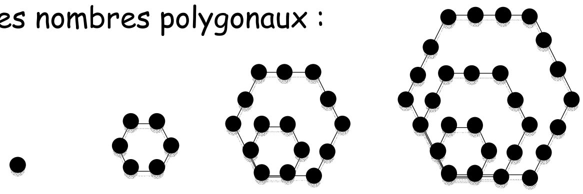


Ceux de rang 5 et 6 sont les nombres 25 et 36, et ainsi de suite.

De la même manière on peut représenter d'autres nombres polygonaux : triangulaires, pentagonaux et aussi hexagonaux.

Voilà les quatre premiers nombres hexagonaux :

1, 6, 15, 28, de rang respectif 1, 2, 3 et 4.



Quel est le nombre carré le plus proche de 1 000 ?

Quel est le nombre hexagonal le plus proche de 1 000 ?

Indiquez aussi le rang de chacun d'eux.

Expliquez comment vous avez trouvé vos réponses.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Déterminer le nombre carré et le nombre hexagonal le plus proche de 2016.

Analyse de la tâche

- Comprendre le mode de représentation et de détermination des nombres polygonaux.
- Pour les numéros carrés, on remarque immédiatement que ce sont des carrés parfaits. 1 000 est situé entre 31^2 (= 961) et 32^2 (= 1024), le carré recherché a donc pour rang 32.
- Pour les nombres polygonaux, il est possible, en observant leurs représentations, à partir du premier, de déterminer les suivants en identifiant à chaque fois le nombre de points à ajouter (on peut remarquer que ce nombre est égal à 4n-3, n étant le rang de l'hexagone).

rang :	1	2	3	4	5	6
nb hexagonal	1	6	15 = 6+9	28 = 6+9+13	45 = 6+9+13+17	66 = 6+9+13+17+21

- Pour arriver à 1 000, une telle procédure est longue et sujette à des erreurs de calculs. Il est préférable de trouver une manière de déterminer le terme générique (de rang *n*) au moyen du calcul de la somme des premiers *n* termes d'une progression arithmétique à partir de 1, de raison 4. Cette somme peut s'exprimer par $n(2n\text{-}1)$. Il faut alors déterminer la valeur de n tel que $n(2n\text{-}1)$ soit la plus proche possible de 1000, soit par essais soit en résolvant l'équation du second degré $2n^2\text{-}n = 1000$.
  La solution positive de l'équation est environ 22,6, donc le rang du nombre hexagonal voisin de de 1000 est 23 et le nombre hexagonal cherché est 23 × 45 = 1035.
- Si on ne connait pas la formule pour les nombres hexagonaux, on peut considérer autrement la suite des termes et chercher à les écrire sous la forme d'un produit de deux facteurs :

rang	1	2	3	4	5	6	7	8	9
nb hexa	1=1×1	6=2×3	15=3×5	28=4×7	45=5×9	66=6×11	918=7×13	120=8×15	163=9×17

  On peut remarquer que chaque nombre apparait comme le produit du rang du terme par un facteur qui est le double de ce rang diminué de 1 ou comme le produit du rang par un facteur qui correspond au rang qu'on obtiendrait en écrivant la suite des nombres impairs :

rang	1	2	3	4	5	6	7	8	9
impairs	1	3	5	7	9	11	13	15	17
nb hexa	1=1×1	6=2×3	15=3×5	28=4×7	45=5×9	66=6×11	918=7×13	120=8×15	163=9×17

- Chercher, par essais, le rang qui donne un tel produit proche de 1000.