

Journées *Autour des polylogarithmes*

Des propriétés structurelles des polylogarithmes colorés aux aspects algorithmiques des sommes harmoniques colorées

Hoang Ngoc Minh,
Université Lille 2.

(Travail en commun avec l'équipe Calcul Formel de Lille :
Bigotte, Costermans, Enjalbert, Hoeven, Jacob, Oussous, Petitot)

Lyon, 29-30 Septembre 2005

INTRODUCTION

Sommes harmoniques et polylogarithmes colorés

Sommes harmoniques polylogarithmes classiques

$$H_r(N) = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^r}, N \in \mathbb{N}_+, r > 0, \quad \text{et} \quad \text{Li}_r(z) = \sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n^r}, |z| < 1.$$

Généralisation à des multi-indices $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_r)$

$$H_{\mathbf{s}}(N) = \sum_{N \geq n_1 > \dots > n_r > 0} \frac{1}{n_1^{s_1} \dots n_r^{s_r}} \quad \text{et} \quad \text{Li}_{\mathbf{s}}(z) = \sum_{n_1 > \dots > n_r > 0} \frac{z^{n_1}}{n_1^{s_1} \dots n_r^{s_r}}.$$

Soit $\begin{pmatrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1, \dots, b_r \\ s_1, \dots, s_r \end{pmatrix}$, où $b_1, \dots, b_r \in \{1, q, \dots, q^{n-1}\}$, $q = e^{2i\pi/n}$.

$$H_{\begin{matrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{s} \end{matrix}}(N) = \sum_{N \geq n_1 > \dots > n_r > 0} \frac{b_1^{n_1} \dots b_r^{n_r}}{n_1^{s_1} \dots n_r^{s_r}}, \quad \text{Li}_{\begin{matrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{s} \end{matrix}}(z) = \sum_{n_1 > \dots > n_r > 0} \frac{b_1^{n_1} \dots b_r^{n_r}}{n_1^{s_1} \dots n_r^{s_r}} z^{n_1}.$$

Théorème d'Abel

Dans le cas classique, la formule d'Euler-Maclaurin nous donne

$$H_1(N) \sim \log N + \gamma_E - \sum_{k \geq 1} \frac{B_k}{k} \frac{1}{N^k},$$

$$H_r(N) \sim \zeta(r) - \frac{1}{(r-1)N^{r-1}} - \sum_{k \geq r} \frac{B_{k-r+1}}{k-r+1} \binom{k-1}{r-1} \frac{1}{N^k}, \text{ pour } r > 1.$$

Donc, si $r > 1$, d'après le théorème d'Abel,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} H_r(N) = \lim_{z \rightarrow 1} \text{Li}_r(z) = \sum_{n > 0} \frac{1}{n^r} = \zeta(r).$$

Problème : Déterminer algorithmiquement le comportement asymptotique des sommes harmoniques $H_{\mathbf{b}}(N)$ pour $N \rightarrow +\infty$ et le développement singulier des polylogarithmes $\text{Li}_{\mathbf{b}}(z)$ en 1.

Dans le cas où $\begin{pmatrix} b_1 \\ s_1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} H_{\mathbf{b}}(N) = \lim_{z \rightarrow 1} \text{Li}_{\mathbf{b}}(z) = \sum_{n_1 > \dots > n_r > 0} \frac{b_1^{n_1} \dots b_r^{n_r}}{n_1^{s_1} \dots n_r^{s_r}} = \zeta \left(\begin{matrix} \mathbf{b} \\ \mathbf{s} \end{matrix} \right).$$

Fonction génératrice ordinaire des sommes harmoniques

Dans les cas classiques, on a

$$P_1(z) = \sum_{n \geq 0} H_1(n) z^n = \frac{1}{1-z} \log \frac{1}{1-z},$$

$$P_r(z) = \sum_{n \geq 0} H_r(n) z^n = \frac{1}{1-z} \text{Li}_r(z),$$

(avec $H_0(0) = 1$ et pour $r > 0$, $H_r(0) = 0$). Plus généralement,

$$P_s(z) = \sum_{n \geq 0} H_s(n) z^n = \frac{1}{1-z} \text{Li}_s(z),$$

$$P_{\frac{b}{s}}(z) = \sum_{n \geq 0} H_{\frac{b}{s}}(n) z^n = \frac{1}{1-z} \text{Li}_{\frac{b}{s}}(z).$$

Problème : Déterminer algorithmiquement le développement singulier de ces fonctions génératrices $P_{\frac{b}{s}}(z)$ en 1.

Codage des multi-indices par des mots

- ▶ Considérons les alphabets $Y = \{y_k \mid k \in \mathbb{N}_+\}$ et $X = \{x_0, x_1\}$.

$$(s_1, \dots, s_r) \leftrightarrow y_{s_1} \dots y_{s_r} \leftrightarrow x_0^{s_1-1} x_1 \dots x_0^{s_r-1} x_1.$$

- ▶ Considérons l'alphabet coloré $Y = \{y_{b_k} \mid b \in \{1, \dots, q^{n-1}\}, k \in \mathbb{N}_+\}$ et l'alphabet fini $X = \{x_0, x_q, \dots, x_{q^n}\}$.

$$\begin{pmatrix} b_1, \dots, b_r \\ s_1, \dots, s_r \end{pmatrix} \leftrightarrow y_{b_1} \dots y_{b_r} \leftrightarrow x_0^{s_1-1} x_{\tau_1} \dots x_0^{s_r-1} x_{\tau_r},$$

où pour $j = 1, \dots, r$, $\tau_j = \prod_{i=1}^j b_i$.

Exemple

$$\begin{pmatrix} -1, 1, -1 \\ 3, 4, 5 \end{pmatrix} \leftrightarrow x_0^2 x_{-1} x_0^3 x_{-1} x_0^4 x_1.$$

COMBINATOIRE
ALGEBRIQUE DES SERIES
FORMELLES EN VARIABLES
NON COMMUTATIVES

Algèbres de Hopf des séries formelles

- ▶ X^* : *monoïde libre* engendré par l'alphabet X pour \cdot et admet ε comme l'élément *neutre*.
- ▶ $\mathbb{C}\langle X \rangle$ (resp. $\mathbb{C}\langle\langle X \rangle\rangle$): ens des polynômes (resp. séries) sur X .
- ▶ $(\mathbb{C}\langle\langle X \rangle\rangle, \cdot, \varepsilon, \Delta, e, a)$: *algèbre de Hopf de décomposition* :
 - ▶ le co-produit Δ de \cdot est défini par $\langle \Delta w | u \otimes v \rangle = \langle w | u \sqcup v \rangle$.
En particulier, $\Delta x = \varepsilon \otimes x + x \otimes \varepsilon$. Δ est co-associatif et est un morphisme pour \cdot , i.e. $\Delta(uv) = \Delta(u)\Delta(v)$.
 - ▶ la co-unité $e : \mathbb{C}\langle X \rangle \rightarrow \mathbb{C}\langle X \rangle$ est définie par $e(P) = \langle P | \varepsilon \rangle$,
 - ▶ l'*antipode* est défini par $a(w) = (-1)^{|w|} \tilde{w}$,
- ▶ $(\mathbb{C}\langle\langle X \rangle\rangle, \sqcup, \varepsilon, \Phi, e, a)$: *algèbre de Hopf de factorisation* :
 - ▶ le produit \sqcup est défini récursivement par $u \sqcup \varepsilon = \varepsilon \sqcup u = u$ et $xu \sqcup yv = y[(xu) \sqcup v] + x[u \sqcup (yv)]$.
Par exemple, $x_0 x_1 \sqcup x_0 x_1 = 4 x_0^2 x_1^2 + 2 x_0 x_1 x_0 x_1$.
 - ▶ le co-produit Φ de \sqcup est défini par $\langle \Phi w | u \otimes v \rangle = \langle w | uv \rangle$.
 Φ est un morphisme pour \sqcup , i.e. $\Phi(u \sqcup v) = \Phi(u) \sqcup \Phi(v)$.

Mots de Lyndon

Un mot est *de Lyndon* ssi il est strictement plus petit que ses facteurs droits stricts (pour l'ordre lexicographique).

Exemple

$\{x_0, x_1\}, x_0 < x_1$. Les mots de Lyndon de longueur ≤ 5 sont $x_0, x_0^4 x_1, x_0^3 x_1, x_0^3 x_1^2, x_0^2 x_1, x_0^2 x_1 x_0 x_1, x_0^2 x_1^2, x_0^2 x_1^3, x_0 x_1, x_0 x_1 x_0 x_1^2, x_0 x_1^2, x_0 x_1^3, x_0 x_1^4, x_1$.

$\mathcal{Lyn}(X)$: ens des mots de Lyndon sur X et forme une base de transcendance pour l'algèbre de mélange sur X (**Radford**).

Exemple

$$\begin{aligned}x_0 x_1 x_0^2 x_1 &= x_0 x_1 \sqsupset x_0^2 x_1 - 3 x_0^2 x_1 x_0 x_1 - 6 x_0^3 x_1^2, \\x_0^3 x_1 x_0^4 x_1 &= x_0^3 x_1 \sqsupset x_0^4 x_1 - 5 x_0^4 x_1 x_0^3 x_1 - 15 x_0^5 x_1 x_0^2 x_1 - 35 x_0^6 x_1 x_0 x_1 - 70 x_0^7 x_1^2.\end{aligned}$$

Pour tout $w \in X^*$, $w = l_1^{i_1} \dots l_k^{i_k}$, $i_1 > \dots > i_k$ (**Širšov**).

Exemple

$$x_1 x_0 x_1^2 x_0 x_1^2 x_0^2 x_1 = x_1 \cdot x_0 x_1^2 \cdot x_0 x_1^2 \cdot x_0^2 x_1 = x_1 (x_0 x_1^2)^2 x_0^2 x_1.$$

Factorisation standard et base PBW

- ▶ La *factorisation standard* de $l \in \mathcal{Lyn}(X) \setminus X$, notée $st(l)$, est le couple (u, v) , où $u, v \in \mathcal{Lyn}(X)$ tels que $l = uv$ et v est le plus long facteur droit propre de l vérifiant $u < uv < v$.

Exemple

$$st(x_0^2 x_1 x_0 x_1) = (x_0^2 x_1, x_0 x_1).$$

- ▶ $\mathcal{L}ie_{\mathbb{C}}\langle X \rangle$ (resp. $\mathcal{L}ie_{\mathbb{C}}\langle\langle X \rangle\rangle$) : ens des polynômes (resp. séries) de Lie sur X et à coefficients dans \mathbb{C} .
- ▶ $\{P_l; l \in \mathcal{Lyn}(X)\}$ est une base de $\mathcal{L}ie_{\mathbb{C}}\langle X \rangle$, où la *forme crochetée* P_l du mot de Lyndon l est définie par $P_x = x$ si $x \in X$ et $P_l = [P_u, P_v]$ si $(u, v) = st(l)$.
- ▶ La base PBW $\mathcal{B} = \{P_w; w \in X^*\}$ est obtenue en posant

$$P_w = P_{l_1}^{i_1} P_{l_2}^{i_2} \dots P_{l_k}^{i_k} \quad \text{pour } w = l_1^{i_1} \dots l_k^{i_k}, l_1 > \dots > l_k,$$

- ▶ La base duale $\check{\mathcal{B}} = \{\check{P}_w; w \in X^*\}$ est obtenue en posant $\check{P}_\varepsilon = \varepsilon$, $\check{P}_l = x\check{P}_u$ pour $l = xu \in \mathcal{Lyn}(X)$ et

$$\check{P}_w = \frac{\check{P}_{l_1}^{\sqcup i_1} \sqcup \dots \sqcup \check{P}_{l_k}^{\sqcup i_k}}{i_1! \dots i_k!} \quad \text{pour } w = l_1^{i_1} \dots l_k^{i_k}, l_1 > \dots > l_k.$$

I	P_I	\check{P}_I
x_0	x_0	x_0
x_1	x_1	x_1
x_0x_1	$[x_0, x_1]$	x_0x_1
$x_0^2x_1$	$[x_0, [x_0, x_1]]$	$x_0^2x_1$
$x_0x_1^2$	$[[x_0, x_1], x_1]$	$x_0x_1^2$
$x_0^3x_1$	$[x_0, [x_0, [x_0, x_1]]]$	$x_0^3x_1$
...
$x_0^3x_1^3$	$[x_0, [x_0, [[[x_0, x_1], x_1], x_1]]]$	$x_0^3x_1^3$
$x_0^2x_1x_0x_1^2$	$[x_0, [[x_0, x_1], [[x_0, x_1], x_1]]]$	$3x_0^3x_1^3 + x_0^2x_1x_0x_1^2$
$x_0^2x_1^2x_0x_1$	$[[x_0, [[x_0, x_1], x_1]], [x_0, x_1]]$	$6x_0^3x_1^3 + 3x_0^2x_1x_0x_1^2 + x_0^2x_1^2x_0x_1$
$x_0^2x_1^4$	$[x_0, [[[x_0, x_1], x_1], x_1], x_1]$	$x_0^2x_1^4$
$x_0x_1x_0x_1^3$	$[[x_0, x_1], [[[x_0, x_1], x_1], x_1]]$	$4x_0^2x_1^4 + x_0x_1x_0x_1^3$
$x_0x_1^5$	$[[[[[x_0, x_1], x_1], x_1], x_1], x_1]$	$x_0x_1^5$

Série diagonale

- ▶ $\mathcal{D} = \sum_{w \in X^*} w \otimes w = \prod_{l \in \mathcal{Lyn}(X)} e^{\check{P}_l \otimes P_l}$ (**Schützenberger**).
- ▶ $\log \mathcal{D} = \sum_{w \in X^*} w \otimes \pi_1(w)$, où $\pi_1(w)$ est le polynôme de Lie :
$$\sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \sum_{u_1, \dots, u_k \in X^* \setminus \{\epsilon\}} \langle w | u_1 \sqcup \dots \sqcup u_k \rangle u_1 \cdots u_k.$$
- ▶ Soit $S \in \mathbb{C}\langle\langle X \rangle\rangle$, S est dite *group-like* si $\Delta S = S \otimes S$.
- ▶ S est dite *primitive* si $\Delta S = 1 \otimes S + S \otimes 1$.
- ▶ S vérifie le *critère de Friedrichs* si $\langle S | u \sqcup v \rangle = \langle S | u \rangle \langle S | v \rangle$.
- ▶ $S \in \mathcal{L}ie_{\mathbb{C}}\langle\langle X \rangle\rangle \iff e^S$ vérifie le critère de Friedrichs
 $\iff S$ est primitive $\iff e^S$ est group-like (**Ree**).

POLYLOGARITHMES

Intégrales itérées et séries de Chen d'un chemin

Soit $\mathcal{O} = \{0\} \cup \{q^n = 1\}$. Soit $X = \{x_i, i \in \mathcal{O}\}$, $X_n = X \setminus \{x_0\}$.

Posons $\omega_\rho(z) = a_\rho(z)dz$, où $a_0(z) = z^{-1}$ et, pour $\rho \in \mathcal{O} \setminus \{0\}$,

$a_\rho(z) = \rho(1 - \rho z)^{-1}$. Posons $\mathcal{C} = \mathbb{C}[z, \{a_i(z)\}_{i \in \mathcal{O}}]$.

Les intégrales itérées du chemin $\gamma = z_0 \rightsquigarrow z$ associées à $\{\omega_\rho\}_{\rho \in \mathcal{O}}$ peuvent être codées par des mots (**Fliess**) :

$$\alpha_\gamma(\varepsilon) = 1 \quad \text{et} \quad \alpha_\gamma(x_{i_1} \dots x_{i_k}) = \int_\gamma \omega_{i_1}(t_1) \dots \omega_{i_k}(t_k).$$

Soit $S_\gamma = \sum_{w \in X^*} \alpha_\gamma(w)w$ la *série de Chen* du chemin γ vérifiant

l'équation différentielle suivant avec la condition initiale $S_{z_0 \rightsquigarrow z_0} = 1$

$$(ED) \quad \partial S = \left[\sum_{i \in \mathcal{O}} a_i x_i \right] S.$$

Proposition

Si G, H sont solutions de (ED) alors $\partial(H^{-1}G) = 0$. En particulier, si elles sont groupe-like alors il existe $C \in \text{Lie}_{\mathbb{C}} \langle\langle X \rangle\rangle$ tq $G = \text{He}^C$.

S.G. non-commutative des polylogarithmes

Pour $x \in X, v \in X^* X_n$, on a $\text{Li}_{xv}(z) = \alpha_{0 \rightsquigarrow z}(xv)$. Posons

$$\text{Li}_{x_0^k}(z) = \frac{\log^k z}{k!} \text{ et } \text{Li}_{x_\rho x_0^k}(z) = \int_{0 \rightsquigarrow z} \omega_\rho(t) \frac{\log^k t}{k!}, \rho \in \mathcal{O} \setminus \{0\}.$$

Lemma

Soit $L = \sum_{w \in X^*} \text{Li}_w w$. Alors pour tout entier $l, \partial^l L = R_l L$, avec

$$R_l = \sum_{w(\mathbf{r})=l} \sum_{x_{i_1} \dots x_{i_k} \in X^{\deg(\mathbf{r})}} \prod_{i=1}^{\deg(\mathbf{r})} \binom{\sum_{j=1}^i r_j + j - 1}{r_i} \phi_{\mathbf{r}}(x_{i_1} \dots x_{i_k}),$$

où $w(\mathbf{r}) = k + r_1 + \dots + r_k$ et $\deg(\mathbf{r}) = k$ pour $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_k)$

et où $\phi_{\mathbf{r}}(x_{i_1} \dots x_{i_k}) = (\partial^{r_1} a_{i_1}) \dots (\partial^{r_k} a_{i_k}) x_{i_1} \dots x_{i_k} \in \mathcal{C}\langle X \rangle$.

Proposition

L satisfait (ED) avec la condition de limite $L(\varepsilon) = e^{x_0 \log \varepsilon} + o(\sqrt{\varepsilon})$.

Theorem (Lille, 97)

$\Delta L = L \otimes L, \forall u, v \in X^*, \text{Li}_u \sqcup v = \text{Li}_u \text{Li}_v$ et

$$L(z) = e^{-x_1 \log(1-z)} \prod_{l \in \mathcal{L}yn(X), l \neq x_0, x_1} e^{P_l \text{Li}_{\tilde{P}_l}(z)} e^{x_0 \log z}.$$

S.G. non-commutative des polyzêtas

Soit $Z = \sum_{w \in X^*} \zeta_{\sqcup}(w)w$, où $\zeta_{\sqcup} : (\mathbb{C}\langle X \rangle, \sqcup) \rightarrow (\mathbb{C}, \cdot)$ vérifiant

$\zeta_{\sqcup}(w) = \zeta(w)$, pour $w \in x_0 X^* X_n$, et $\zeta_{\sqcup}(x_0) = \zeta_{\sqcup}(x_1) = 0$.

Theorem (Lille, 97 et 01)

$$Z = \sum_{k \geq 0} \sum_{x_{\tau_1} \cdots x_{\tau_k} \in X_n^k} \sum_{l_1, \dots, l_k \geq 0} \zeta_{\sqcup}(x_{\tau_1} x_0^{l_1} \circ \cdots \circ x_{\tau_k} x_0^{l_k}) \prod_{i=0}^k \text{ad}_{x_0}^{l_i} x_{\tau_i},$$

où \circ est défini par $x_{\tau} x_0^l \circ P = x_{\tau}(x_0^l \sqcup P)$ pour $x_{\tau} \in X_n, P \in \mathbb{C}\langle X \rangle$.

$$\log Z = \sum_{w \in X^*} \zeta_{\sqcup}(w) \pi_1(w) \text{ et } Z = \prod_{l \in \mathcal{L}yn(X), l \neq x_0, x_1} e^{P_l \zeta(\check{P}_l)}.$$

$$\begin{aligned} Z &= 1 + \zeta(2)[x_0, x_1] + \zeta(3)([x_0, [x_0, x_1]] + [[x_0, x_1], x_1]) + \frac{5}{8}[x_0, x_1]^2 \\ &\quad + \frac{2}{5}\zeta(2)^2([x_0, [x_0, [x_0, x_1]]] + [[[x_0, x_1], x_1], x_1] + \frac{1}{4}[x_0, [[x_0, x_1], x_1]]) + \cdots, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log Z &= \zeta(2)[x_0, x_1] + \zeta(3)([x_0, [x_0, x_1]] + [[x_0, x_1], x_1]) \\ &\quad + \frac{2}{5}\zeta(2)^2([x_0, [x_0, [x_0, x_1]]] + [[[x_0, x_1], x_1], x_1] + \frac{1}{4}[x_0, [[x_0, x_1], x_1]]) + \cdots \end{aligned}$$

Série de Chen & $L(z)$

Proposition

$L(1 - \varepsilon) \sim e^{-x_1 \log \varepsilon} Z e^{x_0 \varepsilon}$, pour $\varepsilon \rightarrow 0^+$. D'où, pour $w \in X^* x_1$,
 $\text{Li}_w(1 - \varepsilon) \sim \sum_{i \geq 1} Q_{w,i}(\log \varepsilon) \varepsilon^i$ et $P_w(1 - \varepsilon) \sim \sum_{i \geq 1} Q'_{w,i}(\log \varepsilon) \varepsilon^i$.

Exemple

Pour $\varepsilon \rightarrow 0^+$, on a $\text{Li}_{x_0}(1 - \varepsilon) \sim \varepsilon$ et $\text{Li}_{x_1}(1 - \varepsilon) \sim -\log \varepsilon$.

Puisque $x_1^2 x_0 = x_0 x_1^2 - x_0 x_1 \sqcup x_1 + \frac{1}{2} x_0 \sqcup x_1^{\sqcup 2}$, on a

$\text{Li}_{x_1^2 x_0}(1 - \varepsilon) \sim \zeta(2, 1) + \zeta(2) \log \varepsilon - \frac{1}{2} \varepsilon \log^2 \varepsilon + \dots$

Theorem (Lille, 97)

$\Delta S_\gamma = S_\gamma \otimes S_\gamma$ et, pour $\varepsilon \rightarrow 0^+$, $S_{\varepsilon \rightsquigarrow 1 - \varepsilon} \sim e^{-x_1 \log \varepsilon} Z e^{-x_0 \log \varepsilon}$.

Proof.

$S_{z_0 \rightsquigarrow z}$ et $L(z)L(z_0)^{-1}$ satisfont (ED) et ont la même valeur en z_0 .

Alors, $S_{\varepsilon \rightsquigarrow 1 - \varepsilon} = L(1 - \varepsilon)L(\varepsilon)^{-1}$. D'où le résultat attendu. \square

L'indépendance linéaire des polylogarithmes

Proposition

$\{\text{Li}_w\}_{w \in X^*}$ sont \mathbb{C} -lin. idpt. Par conséquent, $\{P_w\}_{w \in Y^*}$ sont \mathbb{C} -lin. idpt. et $\{H_w\}_{w \in Y^*}$ sont \mathbb{C} -lin. idpt.

Proof.

Le résultat est immédiat pour $K = 0$. Supposons qu'il soit vrai pour tout $k, 0 \leq k \leq K - 1$. Pour $k = K$,

$$\sum_{|w| \leq K} \lambda_w \text{Li}_w = 0 \iff \lambda_\varepsilon + \sum_{x \in X} \sum_{|u| < K} \lambda_{ux} \text{Li}_{ux} = 0.$$

Pour $p \in \mathbb{C}$ et $x \in X$, $\langle L(e^{px} | \cdot) \rangle = \text{Li}_{ux} + p \text{Li}_u + \dots$. Appliquons $\{\langle L(e^{px} - \text{Id}) | \cdot \rangle\}_{x \in X}$ à la précédente combinaison linéaire :

$$\forall x \in X, \quad p \sum_{|u|=K-1} \lambda_{ux} \text{Li}_u + \sum_{|u| < K-1} \mu_u \text{Li}_u = 0.$$

Par l'hyp. de récurrence, nous obtenons le résultat attendu. \square

SOMMES HARMONIQUES

Algèbre harmonique

Pour $u, v \in Y^*$, nous avons $H_u H_v = H_{u \star v}$, où le produit $u \star v$ est défini par $\varepsilon \star u = u \star \varepsilon = u$ et

$$(y_b^i u) \star (y_j^c v) = y_b^i (u \star y_j^c v) + y_j^c (y_b^i u \star v) + y_{i+j}^{bc} (u \star v).$$

Par conséquent, $P_u \odot P_v = P_{u \star v}$.

Exemple

$$y_2^{-1} \star y_3^{-1} = y_2^{-1} y_3^{-1} + y_3^{-1} y_2^{-1} + y_5^1,$$

$$H_2^{-1} H_3^{-1} = H_{2,3}^{-1,-1} + H_{3,2}^{-1,-1} + H_5^1,$$

$$P_2^{-1} \odot P_3^{-1} = P_{2,3}^{-1,-1} + P_{3,2}^{-1,-1} + P_5^1,$$

$$\begin{aligned} y_2^{-1} y_5^{-1} \star y_4^1 &= y_2^{-1} (y_5^{-1} \star y_4^1) + y_4^1 (y_2^{-1} y_5^{-1} \star \varepsilon) + y_6^{-1} (y_5^{-1} \star \varepsilon) \\ &= y_2^{-1} (y_5^{-1} y_4^1 + y_4^1 y_5^{-1} + y_9^{-1}) + y_4^1 y_2^{-1} y_5^{-1} + y_6^{-1} y_5^{-1} \\ &= y_2^{-1} y_5^{-1} y_4^1 + y_2^{-1} y_4^1 y_5^{-1} + y_4^1 y_2^{-1} y_5^{-1} + y_2^{-1} y_9^{-1} + y_6^{-1} y_5^{-1}, \end{aligned}$$

$$H_{2,5}^{-1,-1} H_4^1 = H_{2,5,4}^{-1,-1,1} + H_{2,4,5}^{-1,1,-1} + H_{4,2,5}^{1,-1,-1} + H_{2,9}^{-1,-1} + H_{6,5}^{-1,-1},$$

$$P_{2,5}^{-1,-1} \odot P_4^1 = P_{2,5,4}^{-1,-1,1} + P_{2,4,5}^{-1,1,-1} + P_{4,2,5}^{1,-1,-1} + P_{2,9}^{-1,-1} + P_{6,5}^{-1,-1}.$$

Théorèmes de structure

Theorem (Lille, 97)

$$(\mathcal{C}\{\text{Li}_w\}_{w \in X^*}, \cdot) \simeq \mathcal{C}[\text{Li}_{\text{Lyn}(X)}].$$

Exemple

$$x_0 x_1 x_0^2 x_1 = x_0 x_1 \sqcup x_0^2 x_1 - 3 x_0^2 x_1 x_0 x_1 - 6 x_0^3 x_1^2,$$

$$\text{Li}_{2,3} = \text{Li}_2 \text{Li}_3 - 3 \text{Li}_{3,2} - 6 \text{Li}_{4,1},$$

$$x_0^3 x_1 x_0^4 x_1 = x_0^3 x_1 \sqcup x_0^4 x_1 - 5 x_0^4 x_1 x_0^3 x_1 - 15 x_0^5 x_1 x_0^2 x_1 - 35 x_0^6 x_1 x_0 x_1 - 70 x_0^7 x_1^2.$$

$$\text{Li}_{4,5} = \text{Li}_4 \text{Li}_5 - 5 \text{Li}_{5,4} - 15 \text{Li}_{6,3} - 35 \text{Li}_{7,2} - 70 \text{Li}_{8,1}.$$

Proposition

$$(\mathcal{C}\{P_w\}_{w \in Y^*}, \odot) \simeq (\mathcal{C}\{H_w\}_{w \in Y^*}, \cdot) \simeq (\mathcal{C}\langle Y \rangle, \star).$$

Theorem (Lille, 03)

$$(\mathcal{C}\{P_w\}_{w \in Y^*}, \odot) \simeq (\mathcal{C}[P_{\text{Lyn}(Y)}], \odot)$$

$$\text{et } (\mathcal{C}\{H_w\}_{w \in Y^*}, \cdot) \simeq (\mathcal{C}[H_{\text{Lyn}(Y)}], \cdot).$$

Exemple

$$y_1 y_4 y_2 = y_1 \star y_4 y_2 - y_4 y_1 y_2 - y_4 y_2 y_1 - y_4 y_3 - y_5 y_2,$$

$$H_{1,4,2} = H_1 H_{4,2} - H_{4,1,2} - H_{4,2,1} - H_{4,3} - H_{5,2},$$

$$P_{1,4,2} = P_1 \odot P_{4,2} - P_{4,1,2} - P_{4,2,1} - P_{4,3} - P_{5,2}.$$

Principe de l'algorithme des D.A.

Theorem (Lille, 05)

$(\mathcal{C}\{P_w\}_{w \in Y^*}, \odot) \simeq (\mathcal{C}[P_{Lyn(Y)}], \odot)$ et pour tout $g \in \mathcal{C}\{P_w\}_{w \in Y^*}$, il existe des coefficients effectivement calculables $c_j \in \mathbb{C}$, $\alpha_j \in \mathbb{Z}$ et

$\beta_j \in \mathbb{N}$ tels que $g(z) \sim \sum_{j=0}^{+\infty} c_j (1-z)^{\alpha_j} P_{y_1^{\beta_j}}(z)$ pour $z \rightarrow 1$.

Par conséquent, il existe des coefficients effectivement calculables

$b_i \in \mathbb{C}$, $\eta_i \in \mathbb{Z}$ et $\kappa_i \in \mathbb{N}$ tels que $[z^n]g(z) \sim \sum_{i=0}^{+\infty} b_i n^{\eta_i} \log^{\kappa_i}(n)$

pour $n \rightarrow \infty$.

Corollary

Soit \mathcal{Z} la \mathbb{Q} -algèbre engendrée par les polyzêtas convergents et soit \mathcal{Z}' la $\mathbb{Q}[\gamma_E]$ -algèbre engendrée par \mathcal{Z} . Alors il existe des coefficients effectivement calculables $b_i \in \mathcal{Z}'$, $\kappa_i \in \mathbb{N}$ et $\eta_i \in \mathbb{Z}$ tels

que $\forall w \in Y^*$, $H_w(N) \sim \sum_{i=0}^{+\infty} b_i N^{\eta_i} \log^{\kappa_i}(N)$ pour $N \rightarrow +\infty$.

Algorithme des D.A.

- ▶ Si $w = y_r, r \geq 1$, on applique Euler-Maclaurin. Par exemple,

$$H_2(N) = \zeta(2) - \frac{1}{N} + \frac{1}{2N^2} + O\left(\frac{1}{N^3}\right).$$

- ▶ Sinon utiliser de décomposition de Radford et stocker une table des D.A. pour les mots de Lyndon. Par exemple,

$$H_{4,2}(N) = \zeta(4, 2) - \frac{1}{3} \frac{\zeta(2)}{N^3} + \frac{\frac{1}{2}\zeta(2) + \frac{1}{4}}{N^4} - \frac{\frac{1}{3}\zeta(2) + \frac{2}{5}}{N^5} + O\left(\frac{1}{N^6}\right).$$

- ▶ Le théorème de Radford donne $y_1 y_4 = y_1 \star y_4 - y_4 y_1 - y_5$.
D'où,

$$\begin{aligned} H_{1,4}(N) &= H_1(N)H_4(N) - H_{4,1}(N) - H_5(N) \\ &= \frac{1}{90} \gamma_E \pi^4 - \zeta(4, 1) + \frac{1}{90} \ln(N) \pi^4 - \zeta(5) + \frac{1}{180} \frac{\pi^4}{N} \\ &\quad - \frac{1}{1080} \frac{\pi^4}{N^2} + \frac{1}{9} \frac{1}{N^3} + \frac{-\frac{1}{24} + \frac{1}{10800} \pi^4}{N^4} + O\left(\frac{1}{N^5}\right) \end{aligned}$$