Université Claude Bernard Lyon 1

MASTER M1 Recherche

Groupes Classiques et Géométrie

EXAMEN

2 Juin 2015

Durée : 3h

Problème 1. *Adhérence des orbites de congruence réelles*
Soit n, p, q des entiers positifs tels que $p + q \leq n$. On considère dans l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, l'ensemble $\mathcal{S}_{p,q}$ des matrices symétriques de signature (p, q). Le but de l'exercice est de montrer que l'adhérence de $\mathcal{S}_{p,q}$ est donnée par

$$\overline{\mathcal{S}_{p,q}} = \bigcup_{h,h' \geq 0} \mathcal{S}_{p-h,q-h'},$$

où, par convention, $\mathcal{S}_{p,q}$ est vide si p ou q n'est pas positif.

1. Montrer qu'une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ est définie positive si et seulement si elle est strictement positive sur la sphère unité de $\mathbb{R}^n$. En déduire que $\mathcal{S}_{n,0}$ est ouverte.

   Montrer d'abord que S est dans le complémentaire de $\mathcal{S}_{n,0}$ si et seulement s'il existe v sur la sphère unité tel que ${}^t vSv \leq 0$. On se rappellera à la compacité de la sphère.

2. Soit $k > 0$ et $h, h' \geq 0$. On définit la matrice diagonale D par:

$$D := \mathrm{diag}(\overbrace{1, \cdots, 1}^{p-h}, \overbrace{\frac{1}{k}, \cdots, \frac{1}{k}}^{h}, \overbrace{-1, \cdots, -1}^{q-h'}, \overbrace{-\frac{1}{k}, \cdots, -\frac{1}{k}}^{h'}, \overbrace{0, \cdots, 0}^{n-p-q}).$$

   Quelle est la signature de D?

   Toute réponse devra être accompagnée d'un théorème clairement énoncé.

3. En déduire l'inclusion
$$\bigcup_{h,h' \geq 0} \mathcal{S}_{p-h,q-h'} \subset \overline{\mathcal{S}_{p,q}}.$$

4. Montrer que si $\bigcup_{h,h' \geq 0} \mathcal{S}_{p-h,q-h'}$ est une partie fermée, alors l'inclusion inverse est vérifiée.

5. On considère l'ensemble $\mathcal{S}_{>p}$ des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et de signature (p', q'), avec $p' > p$. Soit S dans $\mathcal{S}_{>p}$ et $F = \langle e_1, \cdots, e_{p+1} \rangle$ un sous-espace de dimension $p + 1$, tel que S est définie positive sur F. En considérant l'application qui, à une matrice symétrique A, associe la matrice $({}^t e_i A e_j)_{1 \leq i,j \leq p+1}$, montrer que $\mathcal{S}_{>p}$ est un ouvert.

   On pourra s'aider de l'application proposée et du 1) pour exhiber un voisinage ouvert de S dans $\mathcal{S}_{>p}$.

6. Montrer que $\bigcup_{h,h'\geq 0} \mathcal{S}_{p-h,q-h'}$ est fermée et conclure.

   On pourra exprimer cet ensemble (ou disons, son complémentaire) en fonction des ouverts $\mathcal{S}_{>p}$ et $-\mathcal{S}_{>q} = \{-A,\ A \in \mathcal{S}_{>q}\}$.

Problème 2. *Un algorithme pour la décomposition polaire*

A. *Préliminaires*

1. Montrer que la suite réelle $(u_k)_{k\geq 0}$ définie par

$$u_0 > 0,\ u_{k+1} = \frac{1}{2}(u_k + u_k^{-1})$$

   converge vers 1.

   Est-elle bien définie? Ensuite, on pourra montrer qu'à partir d'un certain rang, elle est décroissante et minorée par 1*.*

B. *Un algorithme de Newton dans* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$*.*

Soit M une matrice de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $M = OS$, $O \in \mathrm{O}(n,\mathbb{R})$, $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ sa décomposition polaire. Soit (M_k) la suite de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donnée par:

$$M_0 = M \text{ et } M_{k+1} = \frac{1}{2} M_k(\mathrm{I}_n + ({}^tM_k M_k)^{-1}).$$

Il n'est pour l'instant pas clair qu'elle soit bien définie!

1. On veut tout d'abord montrer que les matrices M_k sont inversibles, et donc, par récurrence, que la suite est bien définie.

   (a) Montrer que si A est une matrice quelconque de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors A^tA est symétrique positive. En déduire que $\mathrm{I}_n + A^tA$ est symétrique définie positive.

   (b) En déduire que M_k est inversible pour tout entier positif k.

C. *Convergence de la suite* (M_k)*.*

On considère, pour tout k, la décomposition polaire $M_k = O_kS_k$ de M_k.

1. Décrire S_k^2 en fonction de M_k.

2. Montrer l'égalité

$$O_{k+1}S_{k+1} = \frac{1}{2} O_k(S_k + S_k^{-1}).$$

3. En déduire $O_{k+1} = O_k$ et $S_{k+1} = \frac{1}{2}(S_k + S_k^{-1})$.

4. Montrer que la suite $(S_k)_{k\geq 0}$ tend vers I_n, puis, que M_k tend vers O.

Problème 3. *Isomorphisme exceptionnel et application*

A. *L'isomorphisme exceptionnel* $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) \simeq \mathrm{SO}_0(2,1)$

1. Montrer que $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ agit par conjugaison sur l'espace réel $\mathfrak{sl}_2$ des matrices de trace nulle dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Déduire de cette action un morphisme ϕ de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathrm{GL}(\mathfrak{sl}_2)$ et donner son noyau.

3. Montrer que $q(A) = -\det(A)$ définit une forme quadratique sur $\mathfrak{sl}_2$ et donner sa signature.

4. Décrire l'algèbre de Lie $\mathfrak{o}(2,1)$ du groupe de Lie $\mathrm{O}(2,1)$. Pourquoi $\mathfrak{o}(2,1)$ est-elle également l'algèbre de Lie de $\mathrm{SO}_0(2,1)$?

5. Quelle est la dimension de $\mathfrak{o}(2,1)$?

6. Montrer que $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ est isomorphe à $\mathrm{SO}_0(2,1)$.

   Décrire les grandes lignes de la preuve en vous inspirant du cours ou du TD.

B. *Sous-espaces maximaux de matrices diagonalisables*

Un sous-espace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace maximal de matrices diagonalisables (SEMMD) si, comme son nom l'indique, c'est un sous-espace, constitué de matrices toutes diagonalisables, et maximal pour cette propriété. On va montrer, en application de l'isomorphisme exceptionnel ci-dessus, que tout SEMMD est $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$-conjugué au sous-espace des matrices réelles symétriques.

1. Après avoir rappelé sa dimension, montrer que le sous-espace des matrices symétriques de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est bien un SEMMD.

2. Montrer qu'une matrice symétrique S de $\mathfrak{sl}_2$ non nulle est diagonalisable (sur $\mathbb{R}$) si et seulement si $q(S) > 0$, où q est la forme définie au **A**.

   Commencer par donner, en fonction de $q(S)$, l'expression du polynôme caractéristique de S.

3. On considère ici l'espace $\mathbb{R}^3$ muni de la forme quadratique $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$ et muni de l'action naturelle de $\mathrm{O}(2,1)$ qui préserve cette forme.

   (a) Enoncer clairement le théorème du cours permettant d'affirmer que deux plans sur lesquels Q est définie positive sont $\mathrm{O}(2,1)$-conjugués.

   (b) Donner des représentants du quotient $\mathrm{O}(2,1)/\,\mathrm{SO}_0(2,1)$ dans $\mathrm{O}(2,1)$. Puis, déduire que deux plans sur lesquels Q est définie positive sont $\mathrm{SO}_0(2,1)$-conjugués.

   On pourra commencer par trouver un plan sur lequel Q est définie positive, et stable par les représentants choisis.

4. Montrer que tout SEMMD est $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$-conjugué au sous-espace des matrices réelles symétriques.

   On commencera par résoudre le problème dans $\mathfrak{sl}_2$, puis on utilisera $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \mathbb{R}\mathrm{I}_2 \oplus \mathfrak{sl}_2$.