Université Claude Bernard Lyon 1

MASTER M1G

Groupes Classiques et Géométrie

EXAMEN

11 Juin 2018

Durée : 3h

Exercice 1. *Morphismes à noyau fixé*

1. Si X est dans $\ker(A)$, alors $A'X = PAX = 0$. Donc $\ker A \subset \ker A'$. L'inclusion inverse se fait en écrivant $A = P^{-1}A'$.

2. Il suffit de le prouver pour la première famille. Si $\sum_i \lambda_i \varphi_A(v_i) = 0$, alors $\varphi_A(\sum_i \lambda_i v_i) = 0$, et donc $\sum_i \lambda_i v_i \in \ker \varphi_A = K$. Comme la famille $(v_i)_i$ est dans un supplémentaire de K, il vient $\sum_i \lambda_i v_i = 0$, et donc, tous les λ_i sont nuls puisque la famille est libre.

3. L'égalité $A' = PA$ est vraie sur K; par linéarité, il suffit de la vérifier sur un supplémentaire de K. Encore par linéarité, il suffit de la vérifier sur $\big(v_1, \dots, v_r\big)$, qui est bien une base d'un supplémentaire de K. Or, par construction de P, on a bien $PAv_i = \psi(\varphi_A(v_i)) = \varphi_{A'}(v_i)$.

4. L'ensemble $\mathcal{O}_{K_0}$ est, par ce qui précède, une orbite pour l'action à gauche de $\mathrm{GL}_m(\mathbb{K})$. Il suffit donc de diviser le cardinal du groupe $\mathrm{GL}_m(\mathbb{K})$ par celui du stabilisateur, pour obtenir le cardinal de l'orbite.

   Le stabilisateur est l'ensemble des P tels que $P\begin{pmatrix} 0_k & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{I}_{n-k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_k & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{I}_{n-k} \end{pmatrix}$. On trouve en décomposant P par blocs, que

   $$P = \begin{pmatrix} \mathrm{GL}_k & 0 \\ \mathcal{M}_{m-k,k} & \mathrm{I}_{m-k} \end{pmatrix}$$

   On trouve donc

   $$|\mathcal{O}_{K_0}| = \frac{(q^m - 1)\cdots(q^m - q^{m-1})}{q^{k(m-k)}(q^k - 1)\cdots(q^k - q^{k-1})} = q^{\frac{(m-k)(m-k-1)}{2}} \prod_{j=k+1}^{m} (q^j - 1).$$

5. En complétant une base de K_0, resp. K, en une base de $\mathbb{K}^n$, on trouve un élément Q de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ qui envoie K_0 sur K. On vérifie que $M \mapsto MQ$ envoie $\mathcal{O}_K$ sur $\mathcal{O}_{K_0}$. On a donc bijection et donc égalité des cardinaux.

Exercice 2. *Le revêtement* $\mathrm{SU}_2(\mathbb{C}) \to \mathrm{SO}(3)$

1. On trouve par un petit calcul:

   $$[A, B] = -2C,\ [A, C] = 2B,\ [B, C] = -2A.$$

Si $M = aA+bB+cC$ commute à $\mathfrak{su}_2(\mathbb{C})$, alors, il commute à A, B, C et donc $[M,X] = 0$ pour $X = A$, B, C. On obtient successivement $2bC - 2cB = 0$, $-2aC + 2cA = 0$, et enfin $2aB - 2bA = 0$, ce qui donne $a = b = c = 0$ car (A, B, C) est libre.

2. On sait que la conjugaison conserve la trace. Il reste à montrer que si $P \in \mathrm{SU}_2(C)$ est $H^* = -H$, alors $(PHP^{-1})^* = -PHP^{-1}$.

   En effet:
$$(PHP^{-1})^* = (PHP^*)^* = PH^*P^* = -PHP^{-1}.$$

   L'espace $\mathfrak{su}_2(\mathbb{C})$ est un espace réel de dimension 3 (une base est (A, B, C)). L'action par conjugaison est linéaire. On en déduit donc un morphisme d'action qui va de $\mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$ vers $\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$.

3. On a $\det(aA + bB + cC) = \begin{vmatrix} ia & -b+ic \\ b+ic & -ia \end{vmatrix} = a^2 + b^2 + c^2$.

   On reconnaît bien là une forme quadratique de signature $(3, 0)$, c'est-à-dire définie positive.

4. Comme la conjugaison respecte le déterminant, qui est une forme quadratique définie positive, le morphisme d'action s'envoie plus précisément dans O_3. Comme $\mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$ est connexe et que le morphhisme est continu, il s'envoie pus précisément encore sur la composante connexe du neutre de O_3, c'est-à-dire SO_3.

5. On a vu en cours que la conjugaison est différentiable. Comme elle va de $\mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$ vers SO_3, sa différentielle (qui est le crochet) va de $\mathfrak{su}_2(\mathbb{C})$ qui est de dimension 3 sur $\mathbb{R}$, sur l'espace tangent en l'identité à SO_3. Or, on a vu en cours que cet espace tangent est l'espace des matrices antisymétriques de taille 3, qui constituent également un espace réel de dimension 3 de la forme $\begin{pmatrix} 0 & -a & -c \\ a & 0 & -b \\ c & b & 0 \end{pmatrix}$, $a, b, c \in \mathbb{R}$.

   Pour montrer que la différentielle est une isomorphisme, il suffit de voir son injectivité. Or, son noyau est constitué des M de $\mathfrak{su}_2(\mathbb{C})$ tels que $[M, H]$ pour tout H de $\mathfrak{su}_2(\mathbb{C})$. Donc, ce noyau est nul par la question 1.

   On peut alors utiliser le théorème d'inversion locale. Il dit que l'image du morphisme d'action de $\mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$ dans $\mathrm{SO}(3)$ contient un ouvert de SO_3. Comme cette image est un sous-groupe contenant un ouvert, le sous-groupe est ouvert, par principe de translation. Or, tout sous-groupe ouvert est fermé. Et comme SO_3 est connexe, tout sous-groupe ouvert et fermé non trivial est le groupe SO_3 tout entier. Le morphisme est donc surjectif.

Exercice 3. *Le théorème de Lie-Kolchin*

1. Comme le groupe G est un groupe de matrices trigonalisables (car complexes) qui commutent entre elles, les matrices sont cotrigonalisables. Il existe donc une matrice de passage commune P qui les trigonalise toutes. En conjugant le groupe G par P, on trouve donc bien un sous-groupe du groupe des matrices triangulaires.

2. Tout sous-groupe distingué d'un sous-groupe distingué d'un groupe H est lui-même distingué dans H, ceci est vrai car distingué signifie stable par automorphismes intérieurs. Comme $D^k(G)$ est distingué dans $D^{k-1}(G)$, on a par récurrence que $D^k(G)$ est distingué dans G. La seconde assertion provient du fait que $K/D(K)$ est toujours abélien.

3. (a) Comme X est connexe contenant e, X^{-1} est également connexe (image d'un connexe par une application continue) contenant e. Donc, $X \cup X^{-1}$ est un connexe comme réunion de connexes ayant un point en commun. Donc, $\left(X \cup X^{-1}\right)^n$ est connexe comme image par une application continue d'un connexe (produit cartesien de connexes). Comme tous les $\left(X \cup X^{-1}\right)^n$ contiennent e, leur réunion est encore connexe, et donc H_X est connexe.

   (b) X est connexe comme image de $K \times K$, qui est connexe, par l'application $(k, k') \mapsto [k, k']$, qui est continue. Donc $D(K)$ qui est égal à H_X, est connexe par ce qui précède.

4. Par minimalité de ℓ, A est non trivial. Comme le groupe dérivé de A est trivial, on a que $A = D^{\ell-1}(G)$ est abélien. On sait alors que sur $\mathbb{C}$, les matrices de $D^{\ell-1}(G)$ sont simultanément trigonalisables (triangulaires supérieures). Soit $(e_1, \cdots, e_n)$ une base qui les trigonalise toutes. On a alors: $e_1 \in V$.

5. On a
$$a\big(g(v)\big) = g\big((g^{-1}ag)(v)\big) = g\big(\chi_v(g^{-1}ag)v\big) = \chi_v(g^{-1}ag)g(v).$$
D'où l'assertion.

6. Tout d'abord, comme v est non nul, $g(v)$ est également non nul. On a vu que $g(v)$ était vecteur propre pour tout élément a de A. L'application de G dans $\mathbb{C}^*$ qui envoie g sur $\chi_v(g^{-1}ag)$ est continue: effectivement, elle est composée de $g \mapsto g^{-1}ag$ qui est continue, avec l'application χ_v, qui est continue sur le stabilisateur de la droite $\mathbb{C}v$ (puisque $(g, w) \mapsto g(w)$ est continue).

   Donc, l'image de G est un connexe. Comme $\chi_{g(v)}(a) = \chi_v(g^{-1}ag)$, cette image est dans l'ensemble discret des valeurs propres (car fini!) de a. Conclusion, $\chi_{g(v)}(a)$ n'a qu'une valeur quand g varie, celle atteinte pour $g = e$, c'est-à-dire λ.

7. Comme le sous-espace W est défini par un système de générateurs G-stable, il est également G-stable. Comme il contient v qui est non nul, W est non nul.

   Reste à montrer que $W \neq \mathbb{C}^n$. Soit a quelconque dans A. Alors, pour tout g dans G, $g(v)$ est un vecteur propre pour a, pour la même valeur propre. En conséquence, W est un sous-espace propre pour a. Si, par l'absurde, $W = \mathbb{C}^n$, alors a est une homothétie pour tout a, et A est un sous-groupe constitué d'homothéties. Comme G est non abélien, $\ell > 1$ et donc A est le groupe dérivé d'un groupe, en l'occurence, le groupe dérivé de $D^{l-2}(G)$. Ainsi, le déterminant d'un élément de A est 1, et comme toutes les matrices de A sont scalaires, ces scalaires sont forcément des racines de l'unité. Or, comme on a l'a vu, A est connexe. Donc, A est le groupe trivial. Ce qui est absurde par minimalité de ℓ.

8. On montre par récurrence sur n que G possède une base de trigonalisation simultanée. Pour $n = 1$, c'est clair. Pour n quelconque, on a obtenu un sous-espace W de dimension k, $1 \leq k \leq n-1$. Soit W' un supplémentaire de W dans $\mathbb{C}^n$. En choisissant une base adaptée à la décomposition $\mathbb{C}^n = W \oplus W'$, on voit que g est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} \rho(g) & \zeta(g) \\ 0 & \rho'(g) \end{pmatrix}$. De plus, vue comme fonction, ρ, resp. ρ', est un morphisme continu de G dans $\mathrm{GL}(W)$, resp. $\mathrm{GL}(W')$. L'image de G par ρ, resp. ρ', est un sous-groupe connexe résoluble de $\mathrm{GL}(W)$, resp. $\mathrm{GL}(W')$. Par récurrence, on trouve une base de W et une base de W' qui trigonalisent simultanément respectivement les $\rho(g)$ et $\rho'(g)$. En concaténant les deux bases, on obtient une base qui trigonalise tous les g de G.