Université Claude Bernard Lyon 1

MASTER M1G

Groupes Classiques et Géométrie

EXAMEN

11 Juin 2018

Durée : 3h

Exercice 1. *Morphismes à noyau fixé*

On fixe un corps $\mathbb{K}$ ainsi que deux entiers positifs m et n. On considère l'action de $\mathrm{GL}_m(\mathbb{K})$ par multiplication à gauche sur l'espace $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ des matrices $m \times n$.

On veut montrer dans un premier temps que deux matrices sont dans la même orbite si et seulement si elles ont même noyau:

$$\exists\, P \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{K}),\ A' = PA \iff \ker A = \ker A'\,;$$

1. Montrer l'implication directe.

   On veut maintenant montrer la réciproque. Soient donc dans la suite $A, A' \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ telles que $\ker A = \ker A'$. On notera K ce noyau commun et on notera φ_A, resp. $\varphi_{A'}$, l'application linéaire de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}^m$, ayant pour matrice A, resp. A', dans les bases canoniques de ces deux espaces.

2. On fixe une base $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_r)$ d'un supplémentaire de K. Montrer que ses images $\varphi_A(\mathbf{v}) := (\varphi_A(v_1), \ldots, \varphi_A(v_r))$ et $\varphi_{A'}(\mathbf{v}') := (\varphi_{A'}(v_1), \ldots, \varphi_{A'}(v_r))$ sont deux familles libres de $\mathbb{K}^m$.

3. On complète ces deux familles libres en deux bases de $\mathbb{K}^m$

   $$\mathbf{w} = \big(\varphi_A(v_1), \ldots, \varphi_A(v_r), v_{r+1}, \ldots, v_m\big) \text{ et } \mathbf{w}' = \big(\varphi_{A'}(v_1), \ldots, \varphi_{A'}(v_r), v'_{r+1}, \ldots, v'_m\big).$$

   Montrer que la matrice P de l'endomorphisme ψ qui envoie $\mathbf{w}$ sur $\mathbf{w}'$ vérifie l'égalité $A' = PA$ comme voulu.

4. On considère maintenant le cas où $\mathbb{K}$ est le corps fini $\mathbb{F}_q$ de cardinal q. Soit K_0 le sous-espace engendré par les k premiers vecteurs de la base canonique de $\mathbb{F}_q^n$, avec $n-k \leq m$. Montrer, en calculant le stabilisateur de la matrice $\left(\begin{smallmatrix} 0_k & 0 \\ 0 & \mathrm{I}_{n-k} \end{smallmatrix}\right)$ de noyau K, que le cardinal de l'ensemble $\mathcal{O}_{K_0}$ des matrices de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ de noyau K_0 est égal à

   $$q^{\frac{(m-k)(m-k-1)}{2}} \prod_{j=k+1}^{m} (q^j - 1).$$

5. Quel est le cardinal de l'ensemble $\mathcal{O}_K$ des matrices de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ de noyau K, où K est un sous-espace quelconque de $\mathbb{F}_q^n$ de dimension k?

   On pourra construire une bijection explicite entre les ensembles $\mathcal{O}_K$ et $\mathcal{O}_{K_0}$.

Exercice 2. *Le revêtement* $\mathrm{SU}_2(\mathbb{C}) \to \mathrm{SO}(3)$

Soit $\mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$ le sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ donné par

$$\mathrm{SU}_2(\mathbb{C}) := \{M \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}),\ M^*M = \mathrm{I}_2,\ \det(M) = 1\}.$$

On rappelle que $\mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$ est un groupe de Lie *connexe*, dont l'espace tangent en l'identité est donné par

$$\mathfrak{su}_2(\mathbb{C}) = \{H,\ H^* + H = 0_n,\ \mathrm{tr}(H) = 0\},$$

qui est l'espace réel des matrices de la forme $\begin{pmatrix} ia & -b+ic \\ b+ic & -ia \end{pmatrix}$, avec $a, b, c \in \mathbb{R}$, engendré par les matrices suivantes:

$$A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer les commutateurs $[A, B] = AB - BA$, $[A, C]$, $[B, C]$, dans la base (A, B, C) de $\mathfrak{su}_2(\mathbb{C})$ et en déduire, à l'aide d'un système, que si $M \in \mathfrak{su}_2(\mathbb{C})$ commute à tout $\mathfrak{su}_2(\mathbb{C})$, alors $M = 0$.

2. Montrer que $\mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$ agit par conjugaison sur $\mathfrak{su}_2(\mathbb{C})$ et en déduire un morphisme de $\mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$ vers $\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$.

3. Montrer que le déterminant fournit une forme quadratique sur l'espace réel $\mathfrak{su}_2(\mathbb{C})$ dont on déterminera la signature.

4. En déduire un morphisme de $\mathrm{SU}_2(\mathbb{C})$ vers O_3, puis, un morphisme à valeurs dans SO_3.

5. En utilisant le théorème d'inversion locale, montrer la surjectivité de ce morphisme.

Exercice 3. *Le théorème de Lie-Kolchin*

On note $D(K)$ le groupe dérivé d'un groupe K, c'est-à-dire le sous-groupe engendré par les commutateurs $[g, h] = ghg^{-1}h^{-1}$, avec $g, h \in K$, de K. On note $D^2(K)$ le groupe dérivé de $D(K)$ et $D^k(K)$, par récurrence.

On rappelle que le sous-groupe $D(K)$ est distingué dans K et que le groupe $K/D(K)$ est le plus grand quotient abélien de K. On pourra utiliser ce résultat sans le justifier.

Un groupe G est dit *résoluble* si $D^\ell = 1$ pour un entier ℓ que l'on choisira minimal dans la suite.

On veut montrer que si G est un sous-groupe résoluble connexe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, alors G est conjugué à un sous-groupe du groupe des matrices triangulaires de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

1. On suppose ici G abélien. Montrer que dans ce cas G est bien conjugué à un sous-groupe du groupe des matrices triangulaires de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

   On pourra se servir du théorème de trigonalisation simultanée pour une famille de matrices trigonalisables qui commutent deux à deux.

   On suppose dans la suite G non abélien.

2. Montrer que $D^k(G)$ est un sous-groupe distingué de G, et que le groupe quotient $D^{k-1}(G)/D^k(G)$ est abélien, pour tout k.

3. On veut montrer dans cette question que si K est un groupe connexe, alors $D(K)$ est connexe. On suppose donc que K est un groupe connexe.

   (a) Soit X une partie connexe de K. On note H_X le sous-groupe engendré par X, c'est-à-dire:

   $$H_X = \bigcup_{n \geq 1} (X \cup X^{-1})^n,$$

où, pour toute partie Y de K, Y^n désigne l'image de la multiplication de $Y \times Y \times \cdots \times Y$ dans K.

Montrer que si X contient le neutre de K, alors H_X est connexe.

On rappelle que si A et B sont connexes avec $A \cap B \neq \emptyset$, alors $A \cup B$ est connexe.

(b) Montrer que $X := \{[k, k'],\ k, k' \in K\}$ est connexe, puis, conclure que $D(K)$ est connexe.

4. On pose $A = D^{\ell-1}(G)$. Montrer que A est abélien, non trivial, connexe, et en déduire, en utilisant 1, que l'ensemble

$$V := \{v \in \mathbb{C}^n,\ Av \in \mathbb{C}v\}$$

est non trivial.

5. Soit v non nul dans V. Pour a dans A, on pose $\chi_v(a)$ le complexe tel que $a(v) = \chi_v(a)v$. Montrer que pour tout g de G, $g(v)$ est encore dans V, et que $\chi_{g(v)}(a) = \chi_v(g^{-1}ag)$, pour tout a de A.

6. En déduire, en utilisant l'application $g \mapsto \chi_{g(v)}(a)$ avec le fait que le spectre de a est discret, que si v est un vecteur propre de a, pour la valeur propre λ, alors $g(v)$ est un vecteur propre de a pour la même valeur propre λ.

7. Soit v non nul dans V, et W le sous-espace engendré par les $g(v)$, $g \in G$. Montrer que W est un sous-espace G-stable, de dimension $0 < \dim W < n$.

   On pourra montrer que si $W = \mathbb{C}^n$, alors $\mathbb{C}^n$ est constitué de vecteurs propres pour a et donc que A est un groupe connexe constitué d'homothéties de déterminant 1, puis conclure une absurdité.

8. En déduire, en utilisant une récurrence sur n, qu'il existe une base de trigonalisation commune à tous les g de G.