Université Claude Bernard Lyon 1

MASTER M1 Recherche
Groupes Classiques et Géométrie

Examen, 1ère session

31 Mai 2011

Durée : 3 heures

La partie B est indépendante de la partie A. La partie C dépend de la partie A et de B 7). La partie D, utilise A, B, C, toutefois, si elle procure un plaisir intellectuel évident, voire une sympathie du correcteur, elle ne procurera en revanche aucun point.
Le but du problème est d'exhiber quelques isomorphismes « exceptionnels » entre certains groupes de matrices sur le corps des complexes.

A. *(15 points)* On commence par montrer dans cette partie un premier isomorphisme exceptionnel entre $\mathrm{SL}_4(\mathbb{C})/\{\pm \mathrm{Id}\}$ et $\mathrm{SO}_6(\mathbb{C})$.

On note $\mathcal{A}_4$ le sous-espace $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ formé des matrices antisymétriques

$$A(a,b,c,d,e,f) = \begin{pmatrix} 0 & -a & -b & -c \\ a & 0 & -d & -e \\ b & d & 0 & -f \\ c & e & f & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{où} \;\; a,b,c,d,e,f \in \mathbb{C}.$$

On introduit le pfaffien d'une telle matrice antisymétrique. Il s'agit de l'application

$$\mathrm{Pf} \,:\, \mathcal{A}_4 \to \mathbb{C},\;\; A(a,b,c,d,e,f) \mapsto af - be + cd.$$

1) Montrer que le pfaffien est une forme quadratique non dégénérée sur $\mathcal{A}_4$. Montrer par un calcul direct l'égalité valable pour tout A de $\mathcal{A}_4$:

$$\mathrm{Pf}(A)^2 = \det(A).$$

2) On suppose ici que A est une matrice antisymétrique inversible. Montrer que l'application

$$\kappa \,:\, \mathrm{SL}_4(\mathbb{C}) \to \{\pm 1\},\; P \mapsto \frac{\mathrm{Pf}(PA\,{}^tP)}{\mathrm{Pf}(A)}$$

est bien définie. Montrer ensuite qu'elle est constante.

3) Montrer que pour toute matrice antisymétrique A et toute matrice P de $SL_4(\mathbb{C})$, on a $\mathrm{Pf}(PA\,{}^tP) = \mathrm{Pf}(A)$.

4) On considère l'action (à gauche) de $\mathrm{SL}_4(\mathbb{C})$ par congruence sur $\mathcal{A}_4$ et le morphisme d'action $\varphi : \mathrm{SL}_4(\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}(\mathcal{A}_4)$ qui en résulte.
a) Déduire de ce qui précède que $\mathrm{Im}\,\varphi$ est un sous-groupe d'un groupe isomorphe à $\mathrm{O}_6(\mathbb{C})$.
b) Montrer que $\ker\varphi = \{\pm\mathrm{Id}\}$.

Indication : Montrer d'abord que toute matrice de $\ker\varphi$ *est diagonale en disant dans un premier temps qu'elle stabilise la matrice antisymétrique*

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5) Décrire les algèbres de Lie $\mathfrak{sl}_4(\mathbb{C})$ et $\mathfrak{so}_6(\mathbb{C})$ comme sous-espaces respectifs de $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ et $\mathcal{M}_6(\mathbb{C})$. Donner ensuite leur dimension sur $\mathbb{C}$.

6) Montrer qu'il existe un isomorphisme entre $\mathrm{SL}_4(\mathbb{C})/\{\pm\mathrm{Id}\}$ et $\mathrm{SO}_6(\mathbb{C})$.

On pourra se servir du résultat suivant : si un morphisme de groupes de Lie possède un noyau discret alors sa différentielle est injective.

B. *(17 points)* Soit n un entier naturel non nul. Dans cette partie, on étudie le groupe symplectique $\mathrm{Sp}(n,\mathbb{C})$ et on prouve en particulier son inclusion dans $\mathrm{SL}_{2n}(\mathbb{C})$. On note pour cela J la matrice $2n \times 2n$ donnée par blocs par :

$$J = \begin{pmatrix} 0_n & -I_n \\ I_n & 0_n \end{pmatrix},$$

où 0_n (resp. I_n), est la matrice $n \times n$ nulle, (resp. identité). On note ω la forme bilinéaire antisymétrique de $\mathbb{C}^{2n}$ qui a pour matrice J dans la base canonique. Enfin, le groupe $\mathrm{Sp}(n,\mathbb{C})$ est le sous-groupe de $\mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{C})$ qui respecte ω.

1) Montrer que pour tout A de $\mathrm{Sp}(n,\mathbb{C})$, on a : $\det(A) = \pm 1$.

On considère le corps des quaternions $\mathbb{H}$. Comme espace vectoriel réel, il possède une base notée $(1, i, j, k)$, telle que

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad k = ij = -ji.$$

La conjugaison quaternionique est l'application $\mathbb{R}$-linéaire telle que

$$\overline{1} = 1, \quad \overline{i} = -i, \quad \overline{j} = -j, \quad \overline{k} = -k.$$

On munit $\mathbb{H}^n$ du produit quaternionique

$$\langle U, V\rangle = \sum_i u_i\,\overline{v_i} \in \mathbb{H},\ \text{où } U = (u_1, \ldots, u_n), V = (v_1, \ldots, v_n)\ u_i, v_i \in \mathbb{H}.$$

On note $\mathbb{C}$ le sous-corps $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}i$ de $\mathbb{H}$. On remarque que tout élément $u = x + yi + zj + tk$ de $\mathbb{H}$, avec x, y, z et t réels, peut s'écrire de façon unique sous la forme $u = u'_1 + u'_2 j$ avec u'_1 et u'_2 complexes : il suffit de poser $u'_1 = x + yi$ et $u'_2 = z + ti$. On identifiera $\mathbb{H}^n$ à $\mathbb{C}^{2n}$ via l'isomorphisme de décomposition complexe $U = (u_1, \ldots, u_n) \mapsto U' = (u'_1, \ldots, u'_n, u'_{n+1}, \ldots, u'_{2n})$ avec, pour tout ℓ, $u'_\ell \in \mathbb{C}$, $u'_{n+\ell} \in \mathbb{C}$, $u_\ell \in \mathbb{H}$ et $u_\ell = u'_\ell + u'_{n+\ell} j$.
2) Montrer que pour tout a dans $\mathbb{C}$, on a : $aj = j\overline{a}$. Montrer par un calcul que si V, W sont dans $\mathbb{H}^n$ et si V', W' sont leur image dans $\mathbb{C}^{2n}$, alors

$$\langle V, W \rangle = (V', W') + \omega(V', W')j,$$

où $(\cdot, \cdot)$ désigne le produit scalaire hermitien usuel de $\mathbb{C}^{2n}$.

3) On note $\mathrm{Sp}(n) = \mathrm{U}_{2n} \cap \mathrm{Sp}(n, \mathbb{C})$, où U_{2n} désigne le sous-groupe des matrices unitaires et $\mathrm{O}_n(\mathbb{H})$ le groupe des endomorphismes de $\mathbb{H}^n$ qui conservent le produit quaternionique. Déduire l'isomorphisme $\mathrm{Sp}(n) \simeq \mathrm{O}_n(\mathbb{H})$.

4) Déduire de 3) que $\mathrm{Sp}(n)$ agit sur la sphère (réelle) S^{4n-1} de dimension $4n - 1$ et que l'on a un homéomorphisme

$$\mathrm{Sp}(n)/\mathrm{Sp}(n-1) \simeq S^{4n-1}.$$

On pourra se contenter des idées principales de la preuve et, surtout, on pourra généraliser à des corps non commutatifs des résultats de bases incomplètes bien connus sur des corps commutatifs.

5) Montrer que $\mathrm{Sp}(n)$ est un groupe connexe.

6) a) Soit M une matrice hermitienne définie positive de $\mathrm{Sp}(n, \mathbb{C})$ et H une matrice hermitienne telle que $\exp H = M$. Montrer que $HJ + J^t H = 0$.
b) Montrer que $A \in \mathrm{Sp}(n, \mathbb{C})$ implique $A^* \in \mathrm{Sp}(n, \mathbb{C})$.
c) Déduire à l'aide de la décomposition polaire l'homéomorphisme

$$\mathrm{Sp}(n, \mathbb{C}) \simeq \mathrm{Sp}(n) \times \mathbb{R}^d,$$

où d est un entier que l'on ne demande pas de préciser.

7) Montrer que $\mathrm{Sp}(n, \mathbb{C})$ est connexe. En déduire qu'il est inclus dans $\mathrm{SL}(2n, \mathbb{C})$.

C. *(6 points.)* On montre dans cette partie qu'on a un isomorphisme (exceptionnel) entre $\mathrm{Sp}(2, \mathbb{C})/\{\pm \mathrm{Id}\}$ et $\mathrm{SO}_5(\mathbb{C})$.

1) Montrer que si l'on restreint l'action définie en A.4 au sous-groupe $\mathrm{Sp}(2, \mathbb{C})$ de $\mathrm{SL}_4(\mathbb{C})$, on obtient une action de $\mathrm{Sp}(2, \mathbb{C})$ qui laisse fixe J. En déduire que l'action ainsi définie laisse fixe un espace de dimension 5.

2) Décrire l'algèbre de Lie $\mathfrak{sp}(2, \mathbb{C})$ et donner sa dimension sur $\mathbb{C}$.

3) Exhiber un isomorphisme de groupes $\mathrm{Sp}(2, \mathbb{C})/\{\pm \mathrm{Id}\} \simeq \mathrm{SO}_5(\mathbb{C})$.

D. *(Points Smiles.)* Imaginez une conversation entre deux mathématiciens consentants qui désireraient trouver un isomorphisme analogue dans le cas réel.