

## Questionnaire GCG

1. Soit  $G$  un groupe agissant sur un ensemble  $X$ . Montrer que le stabilisateur de  $x$  dans  $X$  est conjugué au stabilisateur de  $g \cdot x$ .
2. Montrer que si deux matrices ont même rang, elles sont équivalentes.
3. Donner l'adhérence de l'ensemble des matrices de rang  $r$ , et la preuve qui va avec.
4. Montrer que  $GL_n(\mathbb{C})$  est un groupe topologique ouvert dense connexe dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ .
5. Montrer que le polynôme caractéristique de  $AB$  est égal à celui de  $BA$  (en admettant que  $A \mapsto \chi_A$  est continue).
6. Donner la définition de la topologie sur un quotient  $G/H$ .
7. Montrer que si  $G$  est un groupe compact agissant transitivement sur  $X$  séparé, alors l'application  $g \mapsto g \cdot x$  passe au quotient en un homéomorphisme de  $G/G_x$  sur  $X$  (en admettant que si  $H$  est fermé, alors  $G/H$  est séparé).
8. Montrer que si  $H$  et  $G/H$  sont connexes alors  $G$  est connexe.
9. Montrer que  $GL_n(\mathbb{R})^+$  est connexe.
10. Quelle est la topologie usuelle sur la grassmannienne  $Gr_{m,n}(\mathbb{R})$ . Pourquoi celle-ci est-elle compacte ?
11. Décrire à isomorphisme près le stabilisateur pour l'action de  $GL_n(\mathbb{C})$  par conjugaison d'une matrice diagonalisable de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  (en fonction des multiplicités algébriques des valeurs propres).
12. Montrer qu'une classe de conjugaison dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  est fermée si et seulement si c'est la classe d'une matrice diagonalisable.
13. Définir la suite des noyaux emboîtée  $(K_i)$  pour une matrice nilpotente  $N$ . Pourquoi cette suite s'essouffle-t-elle ?