Université Claude Bernard Lyon 1

MASTER M1

Groupes Classiques et Géométrie

PARTIEL

11 Avril 2017

Durée : 2h

Exercice 1

Soit G un groupe topologique connexe. Soit H un sous-groupe distingué de G dont la topologie induite de G est discrète. En considérant les orbites d'une action judicieuse de G sur H, montrer que H est dans le centre de G.

Exercice 2 (Espace homogène des structures complexes)

On considère l'application $f : \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \to \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R})$ définie par $A \mapsto \begin{pmatrix} \mathrm{Re}(A) & -\mathrm{Im}(A) \\ \mathrm{Im}(A) & \mathrm{Re}(A) \end{pmatrix}$, où $\mathrm{Re}(A)$ (resp. $\mathrm{Im}(A)$) est la partie réelle (resp. imaginaire) de la matrice complexe A. On note l'image de $i \cdot \mathrm{I}_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ par

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{I}_n \\ \mathrm{I}_n & 0 \end{pmatrix}$$

Dans la suite, on identifiera $\mathbb{C}^n$ à $\mathbb{R}^{2n}$ en associant au n-uplet $(z_1, \cdots, z_n)$ de complexes le $2n$-uplet $\big(\mathrm{Re}(z_1), \cdots, \mathrm{Re}(z_n), \mathrm{Im}(z_1), \cdots, \mathrm{Im}(z_n)\big)$.

1. On note $\underline{e} := (e_k)_{1 \leq k \leq n}$ la base canonique du $\mathbb{C}$-espace $\mathbb{C}^n$ de sorte que $\underline{e}_{\mathbb{R}} := (e_1, \cdots, e_n, ie_1, \cdots, ie_n)$ est une $\mathbb{R}$-base de $\mathbb{R}^{2n}$. Soit A la matrice d'un $\mathbb{C}$-endomorphisme φ de $\mathbb{C}^n$, dans la base $\underline{e}$. Quelle est la matrice de φ, vu comme $\mathbb{R}$-endomorphisme de $\mathbb{R}^{2n}$, dans la base $\underline{e}_{\mathbb{R}}$?

2. En déduire que f est un morphisme injectif de groupes, et que f est continu pour les topologies de matrices.

3. Montrer que l'image de f est le sous-groupe fermé de $\mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R})$ suivant

   $$f\big(\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})\big) = \{M \in \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R}) \mid MJ = JM\}.$$

   On identifie désormais le groupe topologique $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ à son image dans $\mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R})$.

4. On considère l'ensemble des *structures complexes* sur $\mathbb{R}^{2n}$ donné par

   $$\mathcal{C} := \{M \in \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R}),\ M^2 = -\mathrm{I}_{2n}.\}$$

Montrer que $\mathcal{C}$ est l'ensemble des matrices $\mathbb{R}$-semblables à J.

Pour l'inclusion directe, on montrera que si M est dans $\mathcal{C}$, alors M est annulée par un polynôme scindé simple sur $\mathbb{C}$ et qu'elle est $\mathbb{C}$-semblable à la matrice diagonale $\mathrm{diag}(i, \cdots, i, -i, \cdots, -i)$. *On pourra utiliser sans preuve l'équivalence entre $\mathbb{R}$-semblable et $\mathbb{C}$-semblable pour deux matrices réelles.*

5. Montrer que l'ensemble $\mathcal{C}$ des structures complexes est homéomorphe à $\mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R})/\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

6. En admettant la formule $\det(f(A)) = |\det(A)|^2$, montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \subset \mathrm{GL}^+_{2n}(\mathbb{R})$, puis, que $\mathcal{C}$ possède deux composantes connexes.

Exercice 3 [Cas particulier d'un théorème de Witt]

Soit E un espace vectoriel de dimension n muni d'une forme quadratique non dégénérée q de forme polaire φ, sur un corps $\mathbb{K}$ de caractéristique différente de 2.

On appelle isométrie entre deux sous-espaces G et G' de E un isomorphisme f entre G et G' tel que

$$\varphi\big(f(x), f(y)\big) = \varphi(x, y), \forall x, y \in G.$$

Dans ce cas, on dira que G et G' sont isométriques.

Soit F un sous-espace de E de dimension m tel que q soit non dégénérée sur F. Soit F' un sous-espace isométrique à F. On veut montrer que $F^\perp$ et $F'^\perp$ sont isométriques.

1. Montrer que deux sous-espaces G et G' sont isométriques si et seulement s'il existe une base $\mathcal{B}$ de G et une base $\mathcal{B}'$ de G' telles que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(q\,|_G) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(q\,|_{G'})$.

2. Montrer que $E = F \oplus F^\perp$ et que q est non dégénérée sur $F^\perp$.

3. Soit $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Montrer que $F^\perp$ et $F'^\perp$ sont isométriques.

4. Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. On suppose que la signature de $q|_F$ est (r', s') et que la signature de q est (r, s). Montrer que la signature de $q|_{F^\perp}$ est donnée par $(r - r', s - s')$. En déduire que $F^\perp$ et $F'^\perp$ sont isométriques.

5. Soit $\mathbb{K} = \mathbb{F}_p$ (p impair). On suppose que le discriminant de $q|_F$ est ϵ et que le discriminant de q est ζ. Montrer que le discriminant de $q|_{F^\perp}$ est $\zeta\epsilon^{-1}$. En déduire que $F^\perp$ et $F'^\perp$ sont isométriques.

6. Pour les corps $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{F}_p$, montrer que si σ est une isométrie de F vers F', alors σ se prolonge en une isométrie de E.