Université Lyon I
M1. Groupes classiques et Géométrie.

COMPACITE LOCALE

Voici tout le matériel nécessaire pour aborder la compacité locale.

Définition. Un espace est dit localement compact s'il est séparé et si tout point de cet espace possède un voisinage ouvert à clôture compacte.

On trouve aussi dans la littérature une autre définition :

Définition. Un espace est dit localement compact s'il est séparé et si tout point de cet espace possède une base de voisinages ouverts à clôture compacte.

Le fait que ces deux définitions coïncident s'appuie fortement sur la séparabilité.

Proposition. Ces deux définitions sont équivalentes.

Preuve : Il suffit de montrer que la première implique la seconde.
Soit donc x dans X, localement compact selon la première définition. Soit V un voisinage ouvert de x. On veut trouver un voisinage compact de x contenu dans V. Soit U un voisinage ouvert de x à fermeture compacte, quitte à prendre l'intersection avec V, on peut supposer que $U \subset V$. Supposons construit un voisinage ouvert W de x inclus dans U tel que $\overline{W} \subset U$. Alors, $\overline{W}$ est compact et inclus dans V, ce qui confirmerait la proposition. Montrons donc l'existence d'un tel ouvert W. Soit δU la frontière de U, qui est compacte. Pour tout x_i de δU, il existe un ouvert U_i de x_i et un ouvert W_i de x qui les séparent. Le compact δU est recouvert de tous les U_i et donc par un nombre fini de ceux-ci. Posons W l'intersection finie des W_i correspondant, alors W est un voisinage ouvert de x et par construction $\overline{W}$ n'intersecte pas δU. Il en résulte $\overline{W} \subset U$.□

$\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ et plus généralement tout espace de dimension finie sur ces corps sont localement compacts pour la topologie métrique. Cela vient du fait qu'un compact est un fermé borné.
Si X est localement compact, tout ouvert O de X l'est également. Cela vient du fait que tout ouvert de O est un ouvert de X ; on se raméne alors à la definition de la compacité par les recouvrements ouverts.
Si X est localement compact, alors tout fermé de X l'est également. Cela vient du fait que l'intersection d'un compact avec un fermé est encore compact, puisque c'est un fermé dans un compact. Avec ces deux propriétés, on peut en faire une troisième:

Proposition. Si X est localement compact et si $X_n \subset X_{n-1} \subset \ldots \subset X_0 = X$ est une suite d'espaces topologiques tels que X_i est soit fermé soit ouvert dans X_{i-1}, alors X_n est localement compact.□

La preuve suivante est instructive, à defaut d'être efficace (voir une preuve express à la fin) :

Proposition. $\mathbb{Q}$ n'est pas localement compact.

Preuve : Supposons $\mathbb{Q}$ localement compact. Alors tout point de $\mathbb{Q}$ aurait un voisinage ouvert à clôture compacte. Choisissons un ouvert U de 0 à clôture compacte. Tout ouvert de U est également à clôture compacte, donc on peut prendre pour U un intervalle ouvert $]-t,t[\cap\mathbb{Q}$, où t est un irrationnel (cela forme effectivmeent une base d'ouverts de 0 dans $\mathbb{Q}$). L'ensemble $]-t,t[\cap\mathbb{Q} = [-t,t] \cap \mathbb{Q}$ est à la fois ouvert et fermé dans $\mathbb{Q}$ car t est irrationnel. Donc, U est compact. Maintenant, on prend une suite x_n de rationnels de U tendant vers t. C'est une suite dans un compact qui ne possède pas de sous-suite convergente dans le-dit compact, puisque toutes ces sous-suites tendent vers t. Ce qui contredit la compacité de U.□

Voici maintenant de quoi briller en société.

Un espace topologique est appelé espace de Baire s'il vérifie que toute intersection dénombrable d'ouverts denses est encore dense. Le fait qu'on ait besoin dans le cours d'espaces topologiques localement compacts vient entre autres du théorème.

Théorème. Tout espace localement compact est un espace de Baire.

Preuve : Soit donc (U_j) une suite d'ouverts partout denses. Pour prouver que l'intersection est partout dense, il suffit de montrer que, si V est un ouvert non vide quelconque, il existe un point commun V et à tous les U_j. Nous allons construire par récurrence une suite d'ensembles fermes B_j vérifiant $B_1 \subset U_1 \cap V$ et $B_{j+1} \subset U_{j+1} \cap \overset{\circ}{B_j}$. Il nous suffira alors de montrer que l'intersection des B_j est non vide pour avoir le résultat. Nous allons exiger que les B_j soient des compacts d'intérieur non vide. L'ouvert $U_1 \cap V$ étant non vide, il est voisinage de l'un quelconque de ses points x, et comme l'espace est localement compact, il existe B_1 un voisinage de x compact contenu dans $U_1 \cap V$. On construit de meme B_{j+1} à partir de $\overset{\circ}{B_j} \cap U_{j+1}$. Or, une suite décroissante de compacts non vides à une intersection non vide (c'est une conséquence de la propriété de Borel-Lebesgue), l'intersection des B_j est non vide.$\square$

On a une preuve express que $\mathbb{Q}$ est non localement compact car $\mathbb{Q}$ n'est pas de Baire. Il suffit de prendre une suite r_n de tous les nombres rationnels et les ouverts denses $X_n := \mathbb{Q} \backslash \{r_n\}$ ont une intersection vide.

Notons que l'ensemble des irrationnels n'est pas localement compact alors que c'est un espace de Baire. Notons pour finir que la locale compacité est essentielle pour définir la compactification d'Alexandroff, c'est à dire la possibilité de prolonger l'espace X en un espace $\overline{X}$ qui est compact.