

Une fois ce point prouvé, le théorème de la base incomplète appliqué à ce système permet de le prolonger en une base (f'_1, \dots, f'_m) de F . Penchons nous sur la matrice de u dans les bases \underline{e}' et \underline{f}' .

Cette matrice se construit colonne par colonne : la première colonne s'obtient en écrivant les coordonnées de $u(e'_1) = f'_1$ dans \underline{f}' , donc en écrivant un 1 puis tout plein de zéros. Pour la colonne suivante, on écrit les coordonnées de $u(e'_2) = f'_2$ dans \underline{f}' , c'est-à-dire un zéro, puis un 1, puis plein de zéros. Et ainsi de suite jusqu'à la r -ème colonne. Quand vient le tour de la $r + 1$ -ème, l'image par u de e'_{r+1} est nulle, donc on la remplit de zéros. Puis on continue à aligner zéro sur zéro jusqu'à plus soif.

C'est bien la matrice J_r que nous contemplons, le pensum terminé.

Ainsi la matrice J_r est la matrice de u dans d'autres bases que celles considérées initialement. Comme on l'a vu à la section précédente, elle est donc équivalente à la matrice A .

On recommence tout avec l'application linéaire v , prouvant que J_r est équivalente à B . A est donc équivalente à B . •

Voyons maintenant tout ce qu'on peut désormais montrer à l'aide de ce théorème.

Théorème 16-6-32 : Soit A une matrice. Son rang est égal à celui de sa transposée. (En d'autres termes : le rang peut être calculé sur les lignes aussi bien que sur les colonnes).

Démonstration : Notons r le rang de A . Avec la notation de la preuve du théorème précédent, considérons la matrice J_r de même largeur et de même hauteur que A . Cette matrice J_r est de façon évidente de rang r ; elle est donc équivalente à A (en fait on a prouvé ce point au cours de la démonstration du théorème précédent). Soit donc Q et P inversibles telles que $A = Q^{-1}J_rP$.

Transposons le tout : ${}^tA = {}^tP {}^tJ_r {}^tQ^{-1}$. Mais la matrice J_r a le bon goût d'être symétrique (et le transposé de l'inverse le bon goût d'être l'inverse de la transposée, économisant des parenthèses). La formule se simplifie donc en ${}^tA = {}^tP J_r {}^tQ^{-1}$. Ceci prouve que tA est équivalente à J_r et a donc elle aussi le rang r . •

Proposition 16-6-89 : Soit \mathbf{K}_1 un corps contenant \mathbf{K} , et A une matrice à coefficients dans \mathbf{K} . Le rang de A est le même qu'on considère A comme une matrice à coefficients dans \mathbf{K} ou comme une matrice à coefficients dans \mathbf{K}_1 .

Démonstration : Soit r le rang de A , vue comme matrice à coefficients dans \mathbf{K} ; avec les mêmes notations que précédemment, A est équivalente à J_r : il existe donc des matrices P et Q à coefficients dans \mathbf{K} , ayant des inverses à coefficients dans \mathbf{K} telles que $A = Q^{-1}J_rP$. Toutes les matrices dans cette égalité peuvent être vues comme des matrices à coefficients dans \mathbf{K}_1 , donc A est encore équivalente à J_r quand on la pense comme une matrice à coefficients dans \mathbf{K}_1 . Son rang est donc toujours r . •

Proposition 16-6-90 : Le rang d'une matrice A est égal au côté de la sous-matrice inversible de A de côté maximal.

Démonstration : Notons r le rang de A et c le maximum des côtés des sous-matrices inversibles de A . On va montrer que $r = c$ en prouvant la double inégalité entre ces entiers. On notera m et n les entiers tels que A soit une matrice (m, n) .

* Montrons que $c \leq r$. Pour ce faire, considérons une sous-matrice carrée (c, c) inversible M de A , où on a conservé les lignes de A portant les numéros i_1, \dots, i_c et les colonnes de A portant les numéros j_1, \dots, j_c . Les c colonnes de C forment donc un système libre dans $\mathcal{M}_{c1}(\mathbf{K})$. Chacune est un morceau de la colonne de même numéro de A ; il est facile de se convaincre que ces colonnes de A forment donc elles aussi un système libre, cette fois dans $\mathcal{M}_{m1}(\mathbf{K})$ (si je dis qu'"il est facile" plutôt que de le faire, c'est précisément que c'est un peu pénible ; c'est aussi parce que j'évite l'usage de la définition formelle de sous-matrice, et que je suis donc réduit à agiter les mains pour tenter de convaincre). Le sous-espace de $\mathcal{M}_{m1}(\mathbf{K})$ engendré par toutes les colonnes de A est donc de dimension supérieure ou égale à c : on a bien prouvé que $c \leq r$.

* Montrons que $r \leq c$. Pour ce faire, considérons le système (C_1, \dots, C_n) formé des n colonnes de A . Ce système engendre un espace de dimension r ; on peut donc en extraire une base $(C_{i_1}, \dots, C_{i_r})$. Portons notre regard sur la matrice B formée de ces seules colonnes, qui est une sous-matrice (m, r) de A : cette matrice B a des colonnes linéairement indépendantes, donc est de rang r . Nous savons désormais que le rang de B peut être calculé sur ses lignes. Cela nous permet de faire subir aux lignes de B les mêmes outrages que subissent les colonnes de A . On en extrait donc r lignes $(L_{j_1}, \dots, L_{j_r})$ formant un système libre. La sous-matrice carrée de B formée de ces r lignes est alors encore de rang r , et elle est (r, r) : c'est donc une sous-matrice carrée inversible de A . Nous en déduisons que $r \leq c$. •