concerne la deuxième ligne, on prouvera le résultat qui y figure plus tard en exercice comme application naturelle de la décomposition polaire, voir le corollaire VI-1.2.1.

A.3. Aparté : axiomes de séparation

Un espace X est dit *séparé* si, pour tous x et x' distincts dans X, il existe un voisinage V de x et un voisinage V' de x' qui ne se coupent pas.
Il existe d'autres axiomes de séparation : un espace X est dit T_1, ou séparé au sens de Fréchet, si pour tous x et x' distincts dans X, il existe un voisinage V de x qui ne contient pas x'. Il est équivalent de demander que les singletons soient fermés (vérifier).
Pour les groupes topologiques, les deux notions coïncident.

A.3.1. Lemme. *Soit G un groupe topologique, et soit e son neutre. Il est équivalent de dire :*

(i) *G est séparé ;*

(ii) *pour tout g de G, le singleton $\{g\}$ est fermé dans G ;*

(iii) *le singleton $\{e\}$ est fermé dans G.*

Démonstration. Si G est séparé, il est T_1 et donc les singletons sont fermés. Réciproquement, supposons que les singletons soient fermés. Soit g un point différent de e. L'ouvert $G \setminus \{g\}$ contient e donc son image réciproque par le produit $\mu : G \times G \to G$ est un ouvert contenant (e, e). Par définition de la topologie produit, il existe deux ouverts V_1 et V_2 de G, qui contiennent e, tels qu'on ait : $V_1 \times V_2 \subset \mu^{-1}(G \setminus \{e\})$. Soit $V = V_1 \cap V_2$, on a : $VV = \mu(V, V) \subset G \setminus \{e\}$. Quitte à remplacer V par $V \cap V^{-1}$, on peut supposer de plus que $V = V^{-1}$: c'est (toujours) un voisinage ouvert de e. Mais alors, gV et V sont deux ouverts disjoints contenant respectivement g et e. On en déduit par le principe de translation que G est séparé.
On vient de démontrer l'équivalence de (i) et (ii). L'équivalence entre (ii) et (iii) résulte du principe de translation : pour tout élément g de G, la translation $h \mapsto gh$ est un homéomorphisme et elle envoie le fermé $\{e\}$ sur le singleton $\{g\}$, donc ce dernier est fermé. □

B. Annexe. Connexité

Définitions de la connexité

B.1. Lemme. *Soit X un espace topologique. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *les seules parties ouvertes et fermées de X sont X et $\emptyset$;*

(ii) *on ne peut pas écrire X comme la réunion de deux fermés disjoints non vides ;*