INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES LYON

Quelques exercices d'analyse corrigés

Sommaire

1. Outils pour les fonctions

Exercice 1 (Transformations de fonctions)

On considère les applications $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définies pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = 3\cos(2x - \pi/4)$ et $g(x) = |f(x)|$.

1. Montrer que f est périodique et en déterminer une période $T > 0$.
2. Étudier la parité des applications $x \longmapsto f(x + \pi/8)$ et $x \longmapsto f(x + 3\pi/8)$. Quelles propriétés peut-on en déduire sur le graphe de f ?
3. Partant du graphe de la fonction cosinus, tracer les graphes de f et g sur $[-T, 2T]$.

Exercice nº 1

1. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x+\pi) = f(x)$, donc f est périodique et $T = \pi$ est une période de f.

2.
   - On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x + \frac{\pi}{8}) = 3\cos(2x)$, donc l'application $x \longmapsto f(x + \frac{\pi}{8})$ est **paire**. En d'autres termes, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(\frac{\pi}{8} + x) = f(\frac{\pi}{8} - x)$.
   - Ainsi le graphe de f est **symétrique** par rapport à l'axe d'équation $x = \frac{\pi}{8}$.

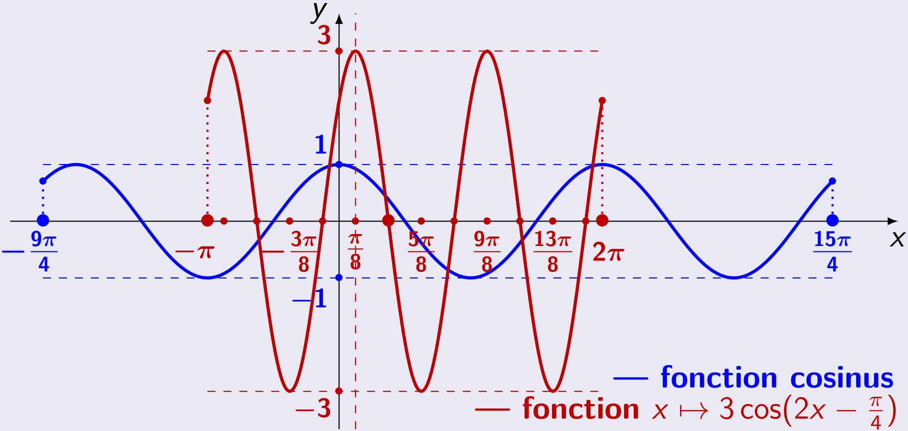
   - On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x + \frac{3\pi}{8}) = -3\sin(2x)$, donc l'application $x \longmapsto f(x + \frac{3\pi}{8})$ est **impaire**. En d'autres termes, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(\frac{3\pi}{8} + x) = -f(\frac{3\pi}{8} - x)$.
   - Ainsi le graphe de f est **symétrique** par rapport au point de coordonnées $(\frac{3\pi}{8}, 0)$.

3. Pour tout $x \in [-T, 2T]$, on a $2x - \frac{\pi}{4} \in [-2T - \frac{\pi}{4}, 4T - \frac{\pi}{4}] = [-\frac{9\pi}{4}, \frac{15\pi}{4}]$.
On utilise donc le graphe de la fonction cos sur $[-\frac{9\pi}{4}, \frac{15\pi}{4}]$.

Exercice nº 1

Tracé

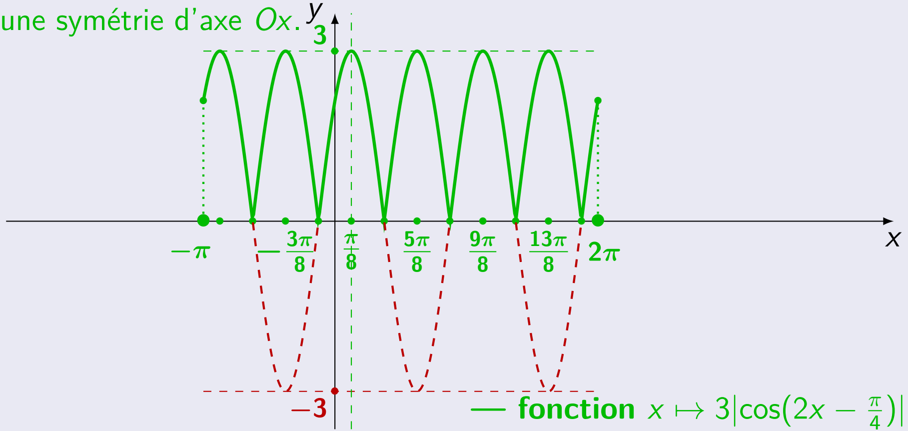
Partant de la fonction **cosinus**, on translate de $\frac{\pi}{4}$ vers la droite (crête atteinte en $\pi/4$), on étire verticalement d'un rapport 3 (amplitude 3), on compresse horizontalement dans un rapport $1/2$,



Exercice nº 1

Tracé

Partant de la fonction **cosinus**, on translate de $\frac{\pi}{4}$ vers la droite (crête atteinte en $\pi/4$), on étire verticalement d'un rapport 3 (amplitude 3), on compresse horizontalement dans un rapport $1/2$, puis on effectue une symétrie d'axe Ox.



Exercice 2 (Fonctions homographiques)

Préliminaire. Soit E, F deux ensembles et $f : E \longrightarrow F$ une application. On suppose qu'il existe deux applications $g : F \longrightarrow E$ et $h : F \longrightarrow E$ telles que $h \circ f = \mathrm{id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{id}_F$.

Montrer que f est bijective, que $g = h$ et que $f^{-1} = g$.

Applications.

1. Soit $a, b, c \in \mathbb{C}$ tels que $c \neq 0$ et $bc \neq -a^2$. On note $E = \mathbb{C} \setminus \{\frac{a}{c}\}$.

   Soit $f : E \longrightarrow E$ définie par $f(z) = \dfrac{az + b}{cz - a}$.

   a. Montrer que l'on a bien $f(E) \subset E$, puis calculer $(f \circ f)(z)$ pour tout $z \in E$.
   b. En déduire que f est bijective et donner l'expression de sa réciproque.
   c. Exemple : $E = \mathbb{C} \setminus \{2\mathrm{i}\}$ et $f(z) = \dfrac{2\mathrm{i}z + 3}{z - 2\mathrm{i}}$.

Exercice 2 (Fonctions homographiques)

Préliminaire. Soit E, F deux ensembles et $f : E \longrightarrow F$ une application. On suppose qu'il existe deux applications $g : F \longrightarrow E$ et $h : F \longrightarrow E$ telles que $h \circ f = \mathrm{id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{id}_F$.

Montrer que f est bijective, que $g = h$ et que $f^{-1} = g$.

Applications.

2. Soit $a,b,c \in \mathbb{C}$ tels que $a \neq 0$ et $bc = -3a^2$. On note $E = \mathbb{C} \setminus \{\frac{a}{c}, -\frac{a}{c}\}$.

   Soit $f : E \longrightarrow E$ définie par $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+a}$.

   a. Montrer que l'on a bien $f(E) \subset E$, puis calculer $(f \circ f \circ f)(z)$ pour tout $z \in E$.
   b. En déduire que f est bijective et donner l'expression de sa réciproque.
   c. Exemples : $E = \mathbb{C} \setminus \{1, -1\}$ et $f(z) = \dfrac{z-3}{z+1}$; $E = \mathbb{C} \setminus \{\mathrm{i}, -\mathrm{i}\}$ et $f(z) = \dfrac{z+3\mathrm{i}}{\mathrm{i}z+1}$.

Exercice n° 2

Préliminaire.

- $h \circ f = \mathrm{id}_E \Longrightarrow f$ injective. En effet :
  soit $x_1, x_2 \in E$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$.
  Appliquons h : $(h \circ f)(x_1) = (h \circ f)(x_2)$.
  Or $(h \circ f)(x_1) = x_1$ et $(h \circ f)(x_2) = x_2$, donc $x_1 = x_2$.

- $f \circ g = \mathrm{id}_F \Longrightarrow f$ surjective. En effet :
  soit $y \in F$. On a $y = (f \circ g)(y) = f\big(g(y)\big)$,
  donc $g(y)$ est un antécédent de y par f dans E.

- Ainsi f est injective et surjective, elle est bijective.
  De plus, pour tout $y \in F$, $g(y)$ est l'unique antécédent de y par f, donc $f^{-1} = g$.
  Enfin, on a $g = \mathrm{id}_E \circ g = (h \circ f) \circ g = h \circ (f \circ g) = h \circ \mathrm{id}_F = h$.

Exercice nº 2

Applications.

1. On pose $E=\mathbb{C}\backslash\{\frac{a}{c}\}$ et pour tout $z\in E$, $f(z)=\dfrac{az+b}{cz-a}$.
   a. Pour tout $z\in E$, $f(z)$ est bien défini. Montrons que $f(z)\in E$:
   $$f(z)=\frac{a}{c}\Longleftrightarrow az+b=az-\frac{a^2}{c}\Longleftrightarrow a^2+bc=0.$$
   Or $bc\neq -a^2$, donc $f(z)\neq\dfrac{a}{c}$, i.e. $f(z)\in E$.
   Ainsi $f(E)\subset E$. On peut donc calculer $(f\circ f)(z)=f(f(z))$:
   $$\begin{aligned}(f\circ f)(z) &= \frac{af(z)+b}{cf(z)-a} \text{ ou encore } f\left(\frac{az+b}{cz-a}\right)\\ &= \frac{a\dfrac{az+b}{cz-a}+b}{c\dfrac{az+b}{cz-a}-a}=\frac{(a^2+bc)z}{(a^2+bc)}=z\end{aligned}$$
   d'où $f\circ f=\mathrm{id}_E$. (On dit que f est **involutive**.)
   b. D'après le préliminaire, f est bijective et $f^{-1}=f$.
   c. Exemple : $a=2\mathrm{i}, b=3, c=1$. On a bien $c\neq 0$ et $bc\neq -a^2$.

Applications.

2. On pose $E = \mathbb{C} \backslash \{-\frac{a}{c}, \frac{a}{c}\}$ et pour tout $z \in E$, $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+a}$ avec $a \neq 0$ et $bc = -3a^2$.

   a. Pour tout $z \in E$, $f(z)$ est bien défini. Montrons que $f(z) \in E$.

      - D'une part,
        $f(z) = \dfrac{a}{c} \Longleftrightarrow az + b = az + \dfrac{a^2}{c} \Longleftrightarrow a^2 = bc.$
        Or $bc = -3a^2$ et $a \neq 0$, donc $f(z) \neq \dfrac{a}{c}$.
      - D'autre part,
        $f(z) = -\dfrac{a}{c} \Longleftrightarrow az + b = -az - \dfrac{a^2}{c} \Longleftrightarrow z = -\dfrac{a^2+bc}{2ac} = \dfrac{a}{c}.$
        Or $\dfrac{a}{c} \notin E$, donc $f(z) \neq -\dfrac{a}{c}$.

      Finalement, $f(z) \in E$ et $f(E) \subset E$.

Applications.

2. On pose $E = \mathbb{C} \backslash \{-\frac{a}{c}, \frac{a}{c}\}$ et pour tout $z \in E$, $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+a}$ avec $a \neq 0$ et $bc = -3a^2$.
   a. On peut donc calculer $(f \circ f)(z) = f\big(f(z)\big)$:

$$\begin{aligned}
(f \circ f)(z) &= \frac{af(z)+b}{cf(z)+a} = \frac{a\dfrac{az+b}{cz+a}+b}{c\dfrac{az+b}{cz+a}+a} \\
&= \frac{(a^2+bc)z+2ab}{2acz+(a^2+bc)} = \frac{-2a^2z+2ab}{2acz-2a^2} \\
&= \frac{-az+b}{cz-a}
\end{aligned}$$

Applications.

2. On pose $E=\mathbb{C}\backslash\{-\frac{a}{c},\frac{a}{c}\}$ et pour tout $z\in E$, $f(z)=\dfrac{az+b}{cz+a}$ avec $a\neq 0$ et $bc=-3a^2$.

   a. On peut ensuite calculer $(f\circ f\circ f)(z)=f\big((f\circ f)(z)\big)$:

$$\begin{aligned}(f\circ f\circ f)(z) &= \frac{-af(z)+b}{cf(z)-a} \text{ ou encore } f\left(\frac{-az+b}{cz-a}\right)\\ &= \frac{-a\dfrac{az+b}{cz+a}+b}{c\dfrac{az+b}{cz+a}-a} \text{ ou encore } \frac{a\dfrac{-az+b}{cz-a}+b}{c\dfrac{-az+b}{cz-a}+a}\\ &= \frac{(bc-a^2)z}{bc-a^2}=z\end{aligned}$$

d'où $f\circ f\circ f=\mathrm{id}_E$.

Applications.

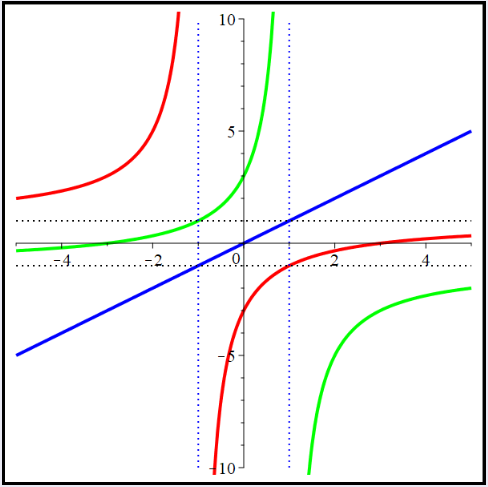
2. On pose $E = \mathbb{C} \backslash \{-\frac{a}{c}, \frac{a}{c}\}$ et pour tout $z \in E$, $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+a}$ avec $a \neq 0$ et $bc = -3a^2$.

   b. D'après le préliminaire, f est bijective et $f^{-1} = f \circ f$.

   c.
   - Exemple : $a = 1, b = -3, c = 1$.
     On a bien $a \neq 0$ et $bc = -3a^2$, et $f^{-1}(z) = -\dfrac{z+3}{z-1}$.
   - Exemple : $a = 1, b = 3\mathrm{i}, c = \mathrm{i}$.
     On a bien $c \neq 0$ et $bc = -3a^2$, et $f^{-1}(z) = \dfrac{-z+3\mathrm{i}}{\mathrm{i}z-1}$.

Exercice nº 2

Tracés



— f — $f \circ f$ — $f \circ f \circ f = \mathrm{Id}_E$

Exercice 3 (Somme des deux fonctions périodiques)

Soit $p, q \in \mathbb{N}^*$ et $T > 0$.
On considère deux applications $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que f soit pT-périodique et g soit qT-périodique.
Montrer que l'application $f + g$ est périodique et en déterminer une période.

Exemple. — Soit $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $h(x) = 2\sin(\frac{x}{2}) - 3\sin(\frac{x}{3})$.

- Étudier la parité de h.
- Déterminer une période T de h.
- Étudier les variations de h sur $[0, T/2]$ puis tracer le graphe de h sur $[-T, 2T]$.

Exercice n° 3

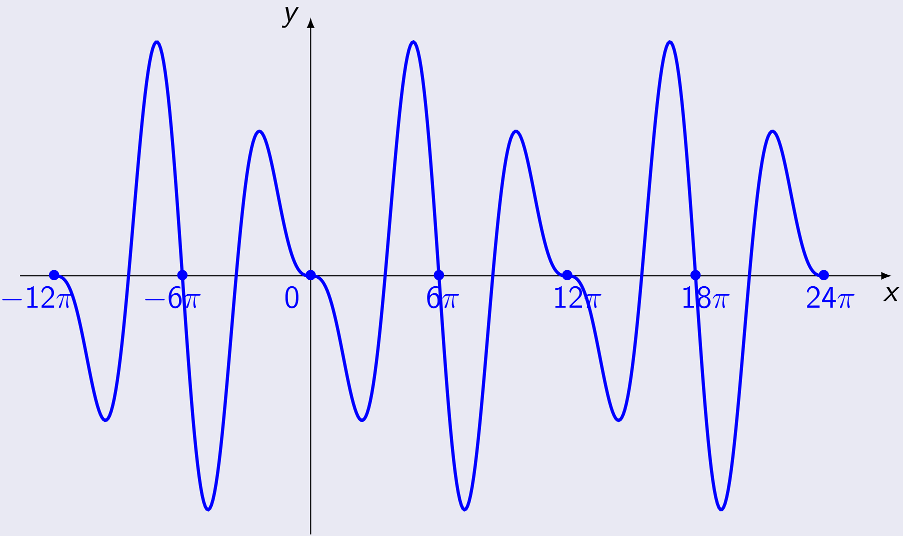
1. Les fonctions f et g admettent une période commune, e.g. $(pq)T$ ou encore $T' = \text{ppcm}(p,q)T$, donc $f+g$ est périodique et T' en est une période.

2.
   - La fonction $x \mapsto 2\sin(\frac{x}{2})$ est 4π-périodique et la fonction $x \mapsto -3\sin(\frac{x}{3})$ est 6π-périodique, donc, en utilisant la question précédente avec $T=\pi$, $p=4$ et $q=6$, on voit que h est périodique et $T'=12\pi$ en est une période.
   Il suffit de l'étudier sur l'intervalle $[0,T']$ ou $[-T'/2,T'/2]$.
   - La fonction h est clairement impaire, il suffit même de l'étudier sur $[0,T'/2]=[0,6\pi]$.
   - Dérivée : $h'(x)=\cos(\frac{x}{2})-\cos(\frac{x}{3})=-2\sin(\frac{5x}{12})\sin(\frac{x}{12})$.
   D'où les variations sur $[0,6\pi]$:

t	0		$\frac{12\pi}{5}$		$\frac{24\pi}{5}$		6π
$h'(t)$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	3
$h(t)$	0	$\searrow$	$-5\sin(\frac{\pi}{5})$	$\nearrow$	$5\sin(\frac{2\pi}{5})$	$\searrow$	0

Exercice nº 3

Tracé



Exercice 4 (Somme des deux fonctions périodiques)

Soit $a \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^*$ et $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \lambda \sin(x) + \mu \sin(ax).$$

1. Calculer les fonctions dérivées f' et f''.
2. Montrer que la fonction f n'est pas périodique.
   On pourra raisonner par l'absurde en supposant qu'elle admet une période $T > 0$, et écrire les conditions de périodicité pour f et f''.

Exercice n° 4

1. Calculons les deux premières dérivées de $f(x)=\lambda\sin(x)+\mu\sin(ax)$:
$$f'(x)=\lambda\cos(x)+a\mu\cos(ax)$$
$$f''(x)=-\lambda\sin(x)-a^2\mu\sin(ax)$$

2. Supposons f périodique. Soit $T>0$ une période de f.
Il est clair que f'' est également périodique et T en est une période :
$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f(x+T)=f(x)\quad\text{et}\quad f''(x+T)=f''(x)$$
En particulier, pour $x=0$, on a $f(T)=f(0)$ et $f''(T)=f''(0)$, soit
$$\lambda\sin(T)+\mu\sin(aT)=0\quad\text{et}\quad\lambda\sin(T)+a^2\mu\sin(aT)=0$$
d'où l'on tire facilement, a^2 étant différent de 1, λ et μ différents de 0 :
$$\sin(T)=\sin(aT)=0,$$
ce qui entraîne l'existence de deux entiers p,q tels que $T=p\pi$ et $aT=q\pi$.
On aurait alors $a=\dfrac{q}{p}$. Ainsi a serait rationnel ce qui est contraire à l'hypothèse.

Exercice 5 (Une courbe de Lissajous)

Pour chaque $t \in \mathbb{R}$, on définit dans un repère orthonormé le point $M(t)$ de coordonnées $(\cos(3t), \sin(2t))$.

1. Étudier la courbe paramétrée $F : t \in [0, \frac{\pi}{2}] \longmapsto M(t)$.
2. Examiner les symétries de la courbe paramétrée $t \in [0, 2\pi] \longmapsto M(t)$; on pourra regarder les points $M(\pi - t)$, $M(t + \pi)$.
3. Tracer alors cette courbe (*courbe de Lissajous* observée par exemple sur un oscilloscope).

Exercice n° 5

1. **Étude sur** $[0, \frac{\pi}{2}]$

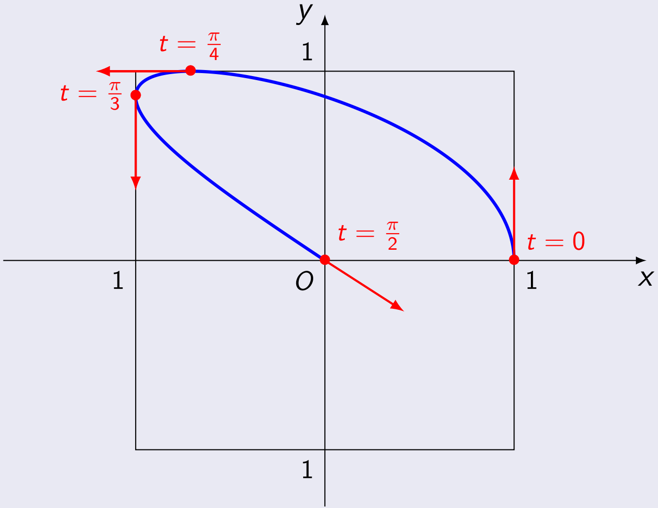
- Vecteur tangent : $\vec{F}'(t) = -3\sin(3t)\vec{i} + 2\cos(2t)\vec{j}$.
  D'où les **variations simultanées** :

t	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$
$x'(t)$	0	$-$	$-\frac{3}{\sqrt{2}}$	$-$	0	$+$	3
$y'(t)$	2	$+$	0	$-$	-1	$-$	-2
$x(t)$	1	$\searrow$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0
$y(t)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	0

- $\vec{F}'(0) = 2\vec{j}$ et $\vec{F}'(\frac{\pi}{3}) = -\vec{j}$ donc la courbe admet aux points de coordonnées $(1, 0)$ et $(-1, \frac{\sqrt{3}}{2})$ des tangentes **verticales** ;
- $\vec{F}'(\frac{\pi}{4}) = -\frac{3}{\sqrt{2}}\vec{i}$ donc la courbe admet au point de coordonnées $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 1)$ une tangente **horizontale** ;
- $\vec{F}'(\frac{\pi}{2}) = 3\vec{i} - 2\vec{j}$ donc la courbe admet à l'origine une tangente de pente $-\frac{2}{3}$.

Exercice n° 5

Tracé sur $[0, \frac{\pi}{2}]$



2. $\forall\, t \in [0,\pi]$, $\begin{cases} x(\pi - t) = -x(t) \\ y(\pi - t) = -y(t) \end{cases}$ donc $M(\pi - t) = s_O(M(t))$
où s_O est la symétrie du plan par rapport à l'origine O

$\Longrightarrow$ l'arc de courbe relatif à $[\frac{\pi}{2},\pi]$ se déduit donc de celui relatif à $[0,\frac{\pi}{2}]$ par la **symétrie par rapport à** O

$\Longrightarrow$ d'où le tracé sur $[0,\pi]$

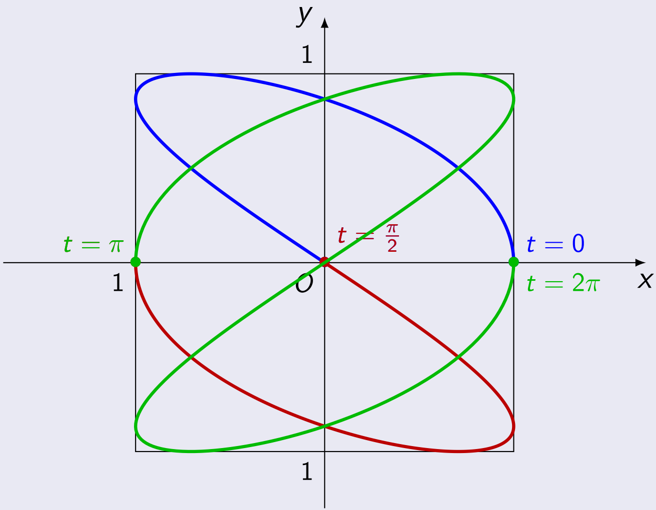
3. $\forall\, t \in [0,2\pi]$, $\begin{cases} x(\pi + t) = -x(t) \\ y(\pi + t) = y(t) \end{cases}$ donc $M(\pi + t) = s_{Oy}(M(t))$
où s_{Oy} est la symétrie du plan par rapport à l'axe Oy

$\Longrightarrow$ l'arc de courbe relatif à $[\pi,2\pi]$ se déduit donc de celui relatif à $[0,\pi]$ par la **symétrie par rapport à** Oy

$\Longrightarrow$ d'où le tracé sur $[\pi,2\pi]$

Exercice n° 5

Tracé sur $[0, 2\pi]$



2. Fonctions continues

Exercice 6 (Supremum progressif)

Soit A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$. On suppose B majorée.

1. Montrer que si $A \subset B$, alors $\sup(A) \leqslant \sup(B)$.
2. Application. — Soit $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ une application majorée et $g : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par

$$g(t) = \sup_{s\in[0,t]} f(s) = \sup f([0,t]).$$

- Montrer que g est croissante.
- On choisit $f(t) = \cos\left(2t - \dfrac{2\pi}{3}\right) - 2\cos\left(t - \dfrac{\pi}{3}\right)$.
  Étudier les variations de f sur $[0, 2\pi]$. On pourra s'aider de la fonction définie par $\varphi(t) = \cos(2t) - 2\cos(t)$.
- Simplifier $g(t)$ dans ce cas puis tracer le graphe de g sur $[0, 4\pi]$.

Exercice nº 6

1. La partie B étant majorée, elle admet une borne supérieure β. On a $\forall x \in B,\ x \leqslant \beta$.
   Par ailleurs, A étant contenu dans B, on a également $\forall x \in A,\ x \leqslant \beta$ ce qui montre que β est un majorant de A.
   Donc A est majorée, elle admet une borne supérieure α, qui par définition est le plus petit des majorants de A. On a donc $\alpha \leqslant \beta$.
2.
   - Soit $t_1, t_2 \in \mathbb{R}^+$ tels que $t_1 \leqslant t_2$. On a $[0, t_1] \subset [0, t_2]$ donc $f([0, t_1]) \subset f([0, t_2])$, puis $\sup f([0, t_1]) \leqslant \sup f([0, t_2])$, soit $g(t_1) \leqslant g(t_2)$. Ainsi g est croissante.
   - On a $\varphi'(t) = 2[\sin(t) - \sin(2t)] = -4\cos(\frac{3t}{2})\sin(\frac{t}{2})$

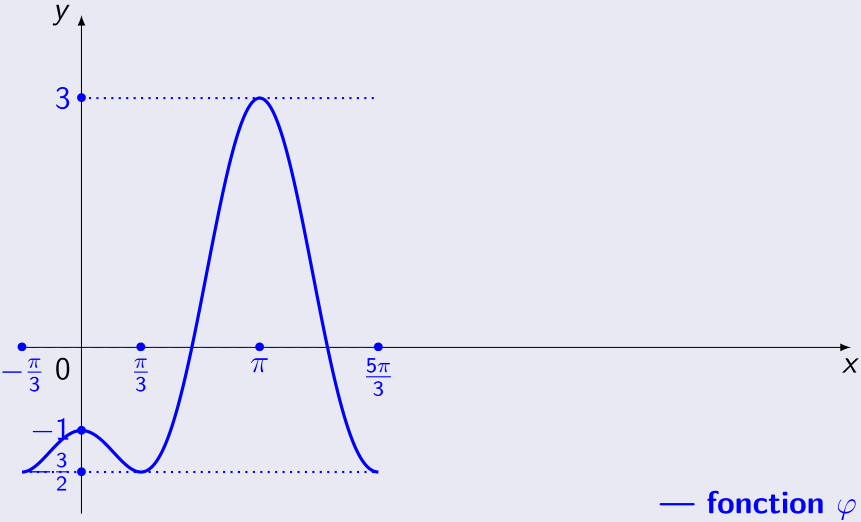
t	$-\frac{\pi}{3}$		0		$\frac{\pi}{3}$		π		$\frac{5\pi}{3}$
$\varphi'(t)$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0
$\varphi(t)$	$-\frac{3}{2}$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\frac{3}{2}$	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\frac{3}{2}$

   - $\varphi(t) = -1 \iff \cos(t)[\cos(t) - 1] = 0 \iff t \in \{0, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\}$

t	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{5\pi}{6}$		$\frac{4\pi}{3}$		$+\infty$
$g(t)$		$f(t)$	$\vert$	-1	$\vert$	$f(t)$	$\vert$	3	

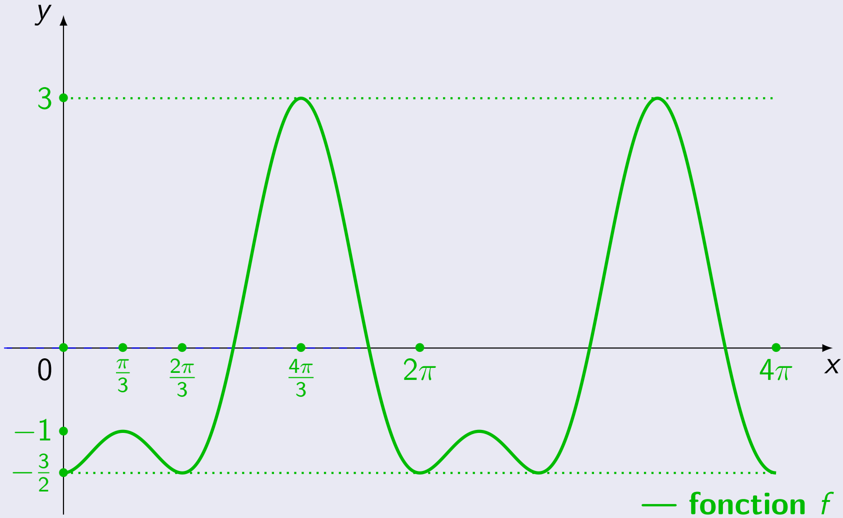
Exercice nº 6

Tracé

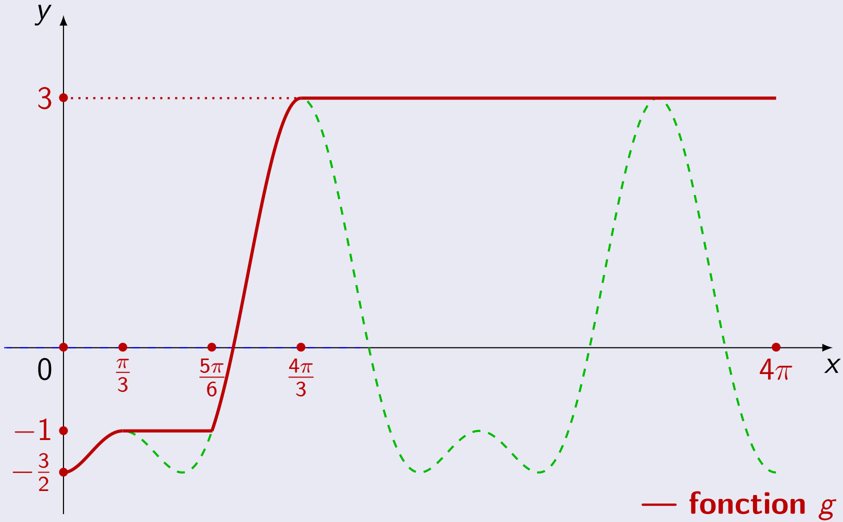


Exercice nº 6

Tracé



Tracé



Exercice 7 (Un théorème de point fixe)

On considère une application $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$.

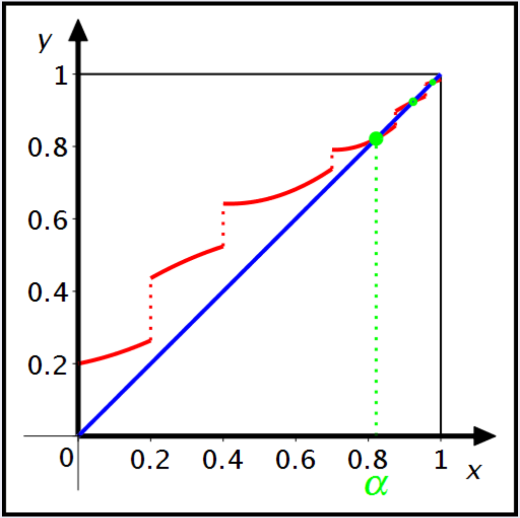
1. On suppose f **croissante** et l'on pose $A = \{x \in [0,1] : f(x) \leqslant x\}$.
   a. Montrer que $A \neq \varnothing$. Montrer que A admet une borne inférieure α et que $\alpha \in [0,1]$.
   b. Montrer que pour tout $x \in A$, on a $f(x) \in A$.
   c. Montrer que $f(\alpha)$ est un minorant de A puis en déduire que $\alpha \in A$.
   d. Déduire alors de la question 2 que $f(\alpha) = \alpha$, i.e. que α est un *point fixe* de f.

2. On suppose f **décroissante**. Admet-elle un point fixe ?

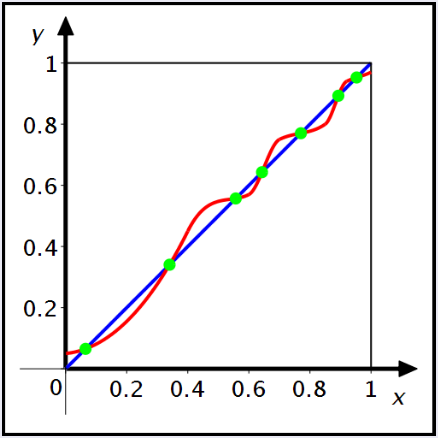
3. On suppose f **continue** et l'on pose, pour tout $x \in [0,1]$: $g(x) = f(x) - x$.
   a. Montrer que g admet une racine $\alpha \in [0,1]$.
   b. En déduire que α est un *point fixe* de f.
   c. Que dire dans le cas où f est **décroissante** ?

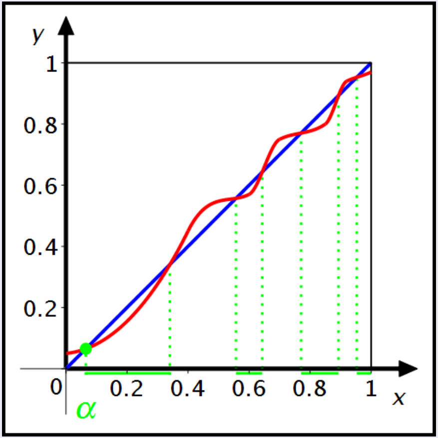
Exercice n° 7

1 Tracé : cas f croissante



① Tracé : cas f croissante



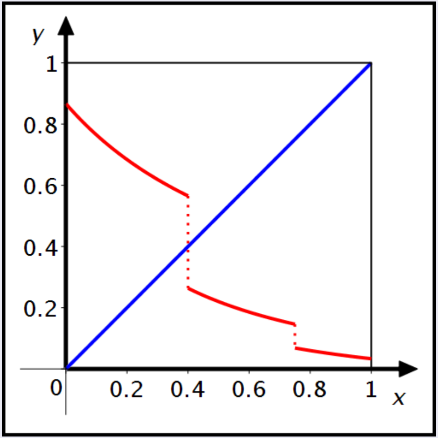


• *Points fixes de f*   — Ensemble $\{x \in [0,1] : f(x) \leqslant x\}$

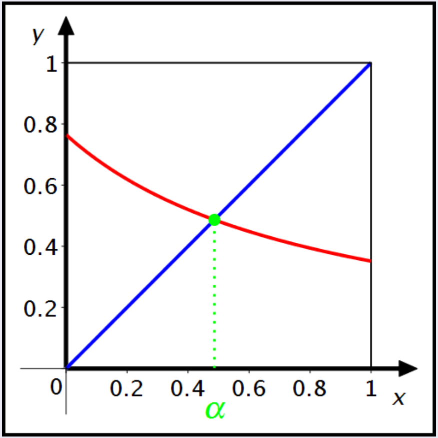
Exercice nº 7

1. *Cas où f est* ***croissante.***
   a. On a $f([0,1]) \subset [0,1]$, c'est-à-dire $\forall x \in [0,1]$, $f(x) \in [0,1]$.
   En particulier : $f(1) \leqslant 1$, donc $1 \in A$ et $A \neq \varnothing$.
   A est une partie de [0,1] non vide, elle est minorée et admet en conséquence une borne inférieure α : $\alpha = \inf(A)$.
   De plus, 0 est un minorant de A ; α étant le plus grand des minorants, on a $\alpha \geqslant 0$. Par ailleurs, 1 est un majorant de A, donc clairement $\alpha \leqslant 1$. Ainsi $\alpha \in [0,1]$.
   b. Soit $x \in A$. On a $f(x) \leqslant x$, puis par croissance de f, on obtient $f(f(x)) \leqslant f(x)$, i.e. $f(x) \in A$.
   c. Soit $x \in A$. On a $x \geqslant \alpha$, puis par croissance de f, on a $f(x) \geqslant f(\alpha)$.
   De plus $x \geqslant f(x)$, donc $x \geqslant f(\alpha)$, ce qui signifie que $f(\alpha)$ est un minorant de A.
   Or α est le plus grand de minorants, donc $f(\alpha) \leqslant \alpha$, i.e. $\alpha \in A$.
   d. D'après la question 2, puisque $\alpha \in A$, on a aussi $f(\alpha) \in A$.
   Donc $f(\alpha) \geqslant \alpha$. Finalement $f(\alpha) = \alpha$, i.e. α est un *point fixe* de f.

2 Tracé : cas f décroissante



f discontinue

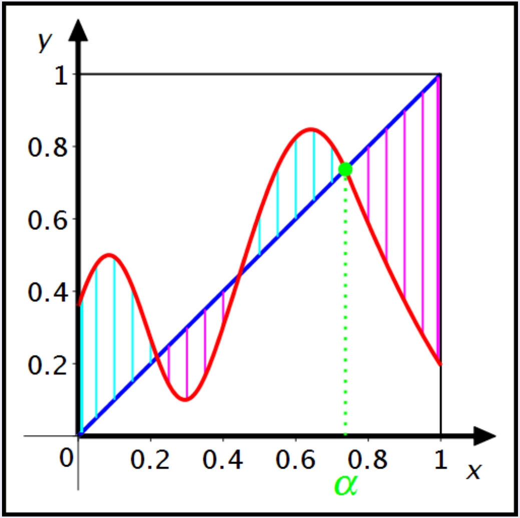


f continue

2. *Cas où f est* ***décroissante.***
   a. f n'admet pas nécessairement de *point fixe* (cf. figure précédente).
   b. En revanche, si f est **décroissante** et **continue,** alors elle admet un **unique** *point fixe* (cf. alinéa suivant).

Exercice n° 7

3 Tracé : cas f continue



— courbe de f

— première bissectrice

— courbe de g avec $g > 0$

— courbe de g avec $g < 0$

— point fixe de f

Exercice n° 7

3. *Cas où f est* ***continue.***
   a. Alors l'application $g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ est également continue et vérifie $g(0) = f(0) \geqslant 0$ et $g(1) = f(1) - 1 \leqslant 0$.
   En conséquence, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un $\alpha \in [0,1]$ tel que $g(\alpha) = 0$.
   b. Ainsi $f(\alpha) = \alpha$.
   c. Lorsque f est **décroissante,** g est **strictement décroissante.**
   Par conséquent, g admet une **unique** racine et f admet un **unique** *point fixe.*

Exercice 8 (Théorème des valeurs intermédiaires)

Soit a et b deux réels tels que $a < b$ et $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue.

1. Montrer qu'il existe $c \in [a, \frac{a+b}{2}]$ tel que $f(c + \frac{b-a}{2}) = f(c) + \frac{f(b)-f(a)}{2}$.
   On pourra introduire l'application $g : [a, \frac{a+b}{2}] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par la relation $g(x) = f(x + \frac{b-a}{2}) - f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{2}$.

   Cas particulier : on suppose que $f(a) = f(b)$.
   Alors il existe un $c \in [a, \frac{a+b}{2}]$ tel que $f(c) = f(c + \frac{b-a}{2})$.

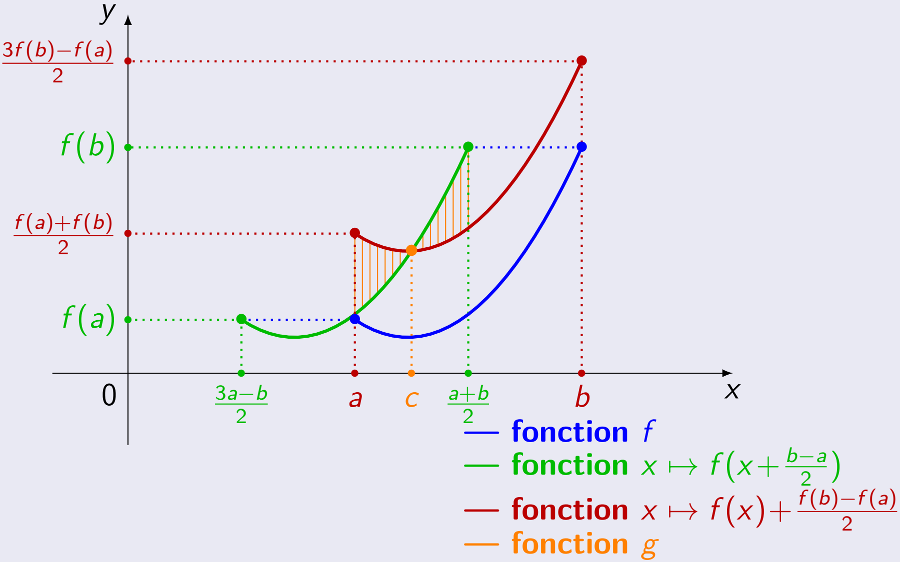
2.
   - ***Application 1.*** — Un véhicule parcourt une distance de D km en un temps de T minutes. Il existe alors un laps de temps de $T/2$ minutes durant lequel il parcourt la distance $D/2$ km.
   - ***Application 2.*** — À chaque instant, il existe deux points diamétralement opposés de l'équateur en lesquels la température est identique...

Exercice nº 8

1. - L'application $g : [a, \frac{a+b}{2}] \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue.
   - On a
   $$g(a) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{f(a)+f(b)}{2}$$
   $$g\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{f(a)+f(b)}{2} - f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$
   donc $g(a)$ et $g(\frac{a+b}{2})$ sont opposés, en particulier de signes contraires.
   - Ainsi par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in [a, \frac{a+b}{2}]$ tel que $g(c) = 0$, soit
   $$f\left(c + \frac{b-a}{2}\right) = f(c) + \frac{f(b)-f(a)}{2}.$$

Exercice nº 8

Tracé



Exercice nº 8

2

- ***Application 1.*** — Soit $d : [0, T] \longrightarrow [0, D]$ la loi horaire du véhicule (déplacement en fonction du temps).

  En appliquant le résultat précédent à $a = 0$, $b = T$, $d(0) = 0$ (position de départ) et $d(T) = D$ (position d'arrivée), il existe un instant $t_0 \in [0, \frac{T}{2}]$ pour lequel $d(t_0 + \frac{T}{2}) = d(t_0) + \frac{D}{2}$.

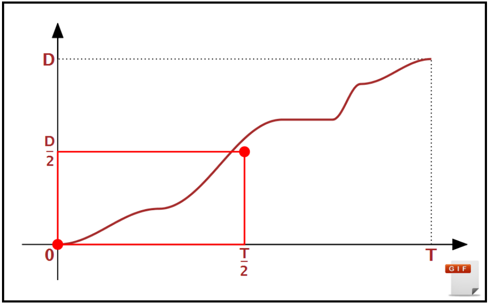
  En d'autres termes, le véhicule parcourt la distance $d(t_0 + \frac{T}{2}) - d(t_0) = \frac{D}{2}$ durant le laps de temps $\frac{T}{2}$.

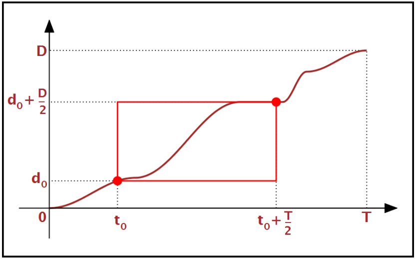
- ***Application 2.*** — Soit $t : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ la température en fonction de la longitude. On a $t(0) = t(2\pi)$ (les points de longitudes 0 et 2π sont confondus).

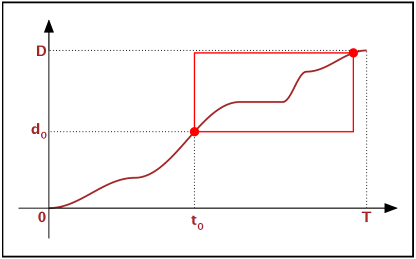
  D'après le résultat précédent, il existe $\theta_0 \in [0, \pi]$ pour lequel $t(\theta_0) = t(\theta_0 + \pi)$.

  Autrement dit, les points diamétralement opposés de longitudes θ_0 et $\theta_0 + \pi$ ont même température.

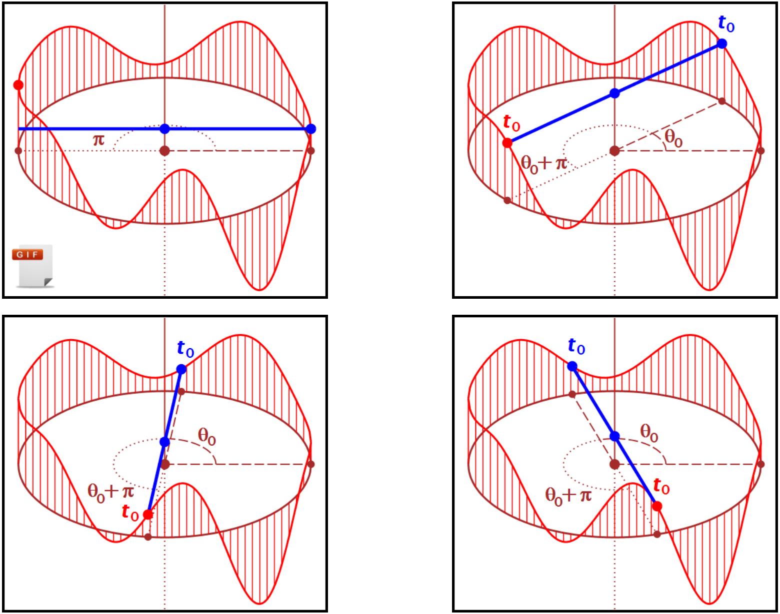
Exercice nº 8







Exercice nº 8



Exercice 9 (Réciprocité à droite/à gauche)

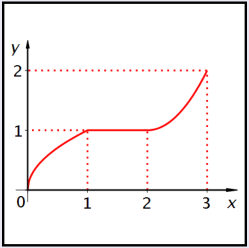
On définit les applications $f : [0,3] \longrightarrow \mathbb{R}$, $g_1 : [0,2] \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g_2 : [0,2] \longrightarrow \mathbb{R}$ selon

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } x \in [0,1] \\ 1 & \text{si } x \in [1,2] \\ (x-2)^2+1 & \text{si } x \in [2,3] \end{cases}$$

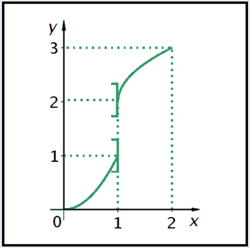
$$g_1(y) = \begin{cases} y^2 & \text{si } y \in [0,1] \\ \sqrt{y-1}+2 & \text{si } y \in]1,2] \end{cases} \qquad g_2(y) = \begin{cases} y^2 & \text{si } y \in [0,1[\\ \sqrt{y-1}+2 & \text{si } y \in [1,2] \end{cases}$$

1. Tracer les graphes des applications f, g_1 et g_2.
2. Étudier la continuité de f, g_1 et g_2.
3. Étudier l'injectivité de f, g_1 et g_2. Déterminer les ensembles images $f([0,3])$, $g_1([0,2])$ et $g_2([0,2])$.
4. Déterminer les composées $f \circ g_1$, $f \circ g_2$, $g_1 \circ f$ et $g_2 \circ f$ et tracer leur graphe. Commenter les résultats obtenus.

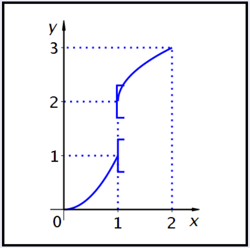
❶ Graphes de f, g_1 et g_2



— graphe de f



— graphe de g_1



— graphe de g_2

2. - La fonction f est clairement continue sur $[0,3]\backslash\{1,2\}$ par opérations de fonctions classiques continues.

   De plus, $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 1 = f(1)$ et $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 1 = f(2)$, donc f est aussi continue en 1 et 2.
   Elle est ainsi continue sur $[0,3]$.

   - De manière analogue, les fonctions g_1 et g_2 sont clairement continues sur $[0,2]\backslash\{1\}$.

   Par ailleurs, $\lim\limits_{y\to 1^-} g_1(y) = 1 = g_1(1)$ et $\lim\limits_{y\to 1^+} g_1(y) = 2 \neq g_1(1)$, donc g_1 est continue en 1 à gauche, mais pas à droite.

   De même, $\lim\limits_{y\to 1^-} g_2(y) = 1 \neq g_2(1)$ et $\lim\limits_{y\to 1^+} g_2(y) = 2 = g_2(1)$, donc g_2 est continue en 1 à droite, mais pas à gauche.

3.
- f est constante sur $[1, 2]$, elle n'est donc pas injective.

  Par ailleurs, elle est croissante et continue sur $[0, 3]$, donc l'image de l'intervalle $[0, 3]$ par f est l'intervalle $[f(0), f(3)]$, soit $f([0, 3]) = [0, 2]$.

- g_1 et g_2 sont strictement croissantes sur $[0, 2]$ donc injectives.

  Par ailleurs, les restrictions de g_1 à $[0, 1]$ et $]1, 2]$ sont continues, donc les images des intervalles $[0, 1]$ et $]1, 2]$ sont les intervalles $[g_1(0), g_1(1)]$ et $]\lim_{y \to 1^+} g_1(y), g_1(2)]$,
  soit $g_1([0, 1]) = [0, 1]$ et $g_1(]1, 2]) =]2, 3]$.

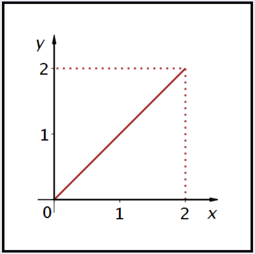
  Enfin, $g_1([0, 2]) = g_1([0, 1] \cup]1, 2]) = g_1([0, 1]) \cup g_1(]1, 2])$
  c'est-à-dire $g_1([0, 2]) = [0, 1] \cup]2, 3]$.

  De manière similaire, on a $g_2([0, 2]) = [0, 1[\cup [2, 3]$.

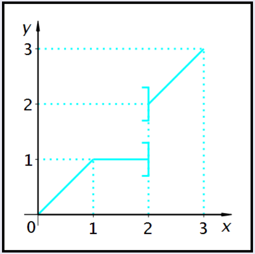
Exercice n° 9

4.
- Si $y \in [0,1]$, $(f \circ g_1)(y) = f(y^2) = \sqrt{y^2} = y$
  Si $y \in]1,2]$, $(f \circ g_1)(y) = f(\sqrt{y-1}+2) = (\sqrt{y-1})^2 + 1 = y$
  Donc $f \circ g_1 = \mathrm{id}_{[0,2]}$.
- Si $y \in [0,1[$, $(f \circ g_2)(y) = f(y^2) = \sqrt{y^2} = y$
  Si $y \in [1,2]$, $(f \circ g_2)(y) = f(\sqrt{y-1}+2) = (\sqrt{y-1})^2 + 1 = y$
  Donc $f \circ g_2 = \mathrm{id}_{[0,2]}$.
- Si $x \in [0,1[$, $(g_1 \circ f)(x) = g_1(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 = x$
  et également $(g_2 \circ f)(x) = x$.
  Si $x \in]2,3]$, $(g_1 \circ f)(x) = g_1((x-2)^2+1) = \sqrt{(x-2)^2} + 2 = x$
  et également $(g_2 \circ f)(x) = x$.
  Si $x \in [1,2]$, $(g_1 \circ f)(x) = g_1(1) = 1$ et $(g_2 \circ f)(x) = g_2(1) = 2$.
  Donc $g_1 \circ f$ et $g_2 \circ f$ diffèrent de $\mathrm{id}_{[0,3]}$.
- g_1 et g_2 sont des « inverses à droite » de f, mais pas à gauche.

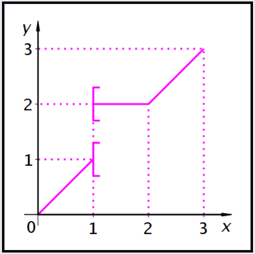
④ Graphes de $f \circ g_1$, $f \circ g_2$, $g_1 \circ f$ et $g_2 \circ f$



— graphe de $f \circ g_1 = f \circ g_2 = \mathrm{Id}_{[0,2]}$



— graphe de $g_1 \circ f \neq \mathrm{Id}_{[0,3]}$



— graphe de $g_2 \circ f \neq \mathrm{Id}_{[0,3]}$

3. Fonctions dérivables

Exercice 10 (Une famille de tangentes)

On considère la famille de fonctions $(f_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_\lambda(x) = \frac{x+\lambda}{x^2+1}.$$

Pour chaque $\lambda \in \mathbb{R}$, on note $\mathcal{C}_\lambda$ la courbe représentative de f_λ.

1. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, puis calculer sa dérivée. Donner les valeurs de $f(0)$, $f(1)$, $f'(0)$ et $f'(1)$.
2. Montrer que les tangentes des $\mathcal{C}_\lambda, \lambda \in \mathbb{R}$, au point d'abscisse 0 sont parallèles.
3. Montrer que les tangentes des $\mathcal{C}_\lambda, \lambda \in \mathbb{R}$, au point d'abscisse 1 sont concourantes.
   Remarque. — Ce résultat subsiste pour tout point d'abscisse non nulle.

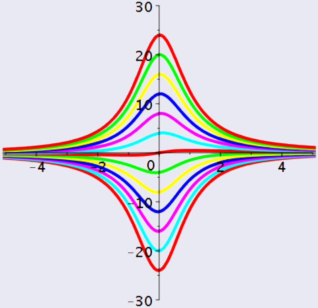
Exercice n° 10

1.
   - La fonction f_λ est le quotient de deux fonctions polynômes, donc dérivables, dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$; f_λ est donc dérivable sur $\mathbb{R}$.
   - On a pour tout $x \in \mathbb{R}$:
   $$f'_\lambda(x) = \frac{(1-x^2) - 2\lambda x}{(x^2+1)^2}.$$
   - En particulier : $f'(0) = 1$ et $f'(1) = -\dfrac{\lambda}{2}$.

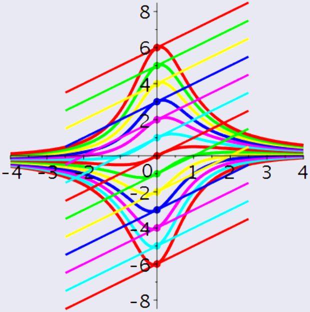
     De plus $f(0) = \lambda$ et $f(1) = \dfrac{\lambda+1}{2}$.

2. L'équation de la tangente $\mathcal{T}_\lambda$ de $\mathcal{C}_\lambda$ au point d'abscisse 0 s'écrit $y = f'(0)x + f(0)$ soit
$$y = x + \lambda.$$
Les tangentes $\mathcal{T}_\lambda, \lambda \in \mathbb{R}$, ont la même pente 1, elles sont donc parallèles.

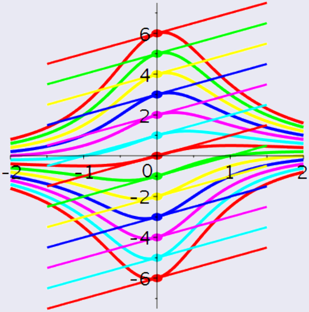
2 Tangentes en 0



Courbes $\mathcal{C}_\lambda$



Tangentes en 0



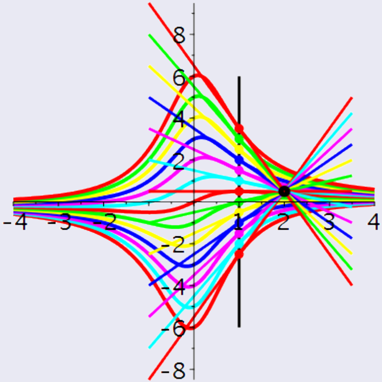
Tangentes en 0 (zoom)

Exercice n° 10

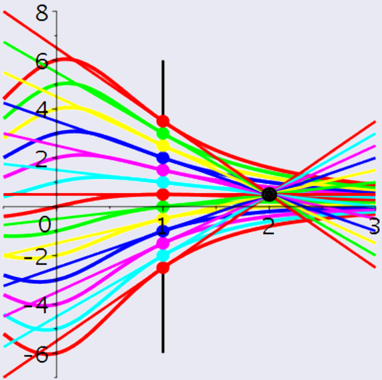
3. L'équation de la tangente $\mathcal{T}_\lambda$ de $\mathcal{C}_\lambda$ au point d'abscisse 1 s'écrit $y = f'(1)(x-1) + f(1)$ soit
$$y = -\frac{\lambda}{2}x + \left(\lambda + \frac{1}{2}\right).$$
Un éventuel point de coordonnées (x_0, y_0) commun à toutes les tangentes $\mathcal{T}_\lambda$ vérifie nécessairement
$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ y_0 = -\frac{\lambda}{2}x_0 + \left(\lambda + \frac{1}{2}\right)$$
ou encore
$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda(x_0 - 2) + (2y_0 - 1) = 0.$$
La fonction $\lambda \mapsto \lambda(x_0 - 2) + (2y_0 - 1)$ est polynomiale et nulle, ses coefficients sont donc nuls : $x_0 - 2 = 0$ et $2y_0 - 1 = 0$, soit $x_0 = 2$ et $y_0 = \frac{1}{2}$.
Les tangentes $\mathcal{T}_\lambda, \lambda \in \mathbb{R}$, sont donc concourantes au point de coordonnées $(2, \frac{1}{2})$.

Exercice nº 10

3 Tangentes en 1



Tangentes en 1



Tangentes en 1 (zoom)

Exercice n$^{\text{o}}$ 10

3. Remarque. — Introduisons les fonctions φ et ψ définies par $\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ et $\psi(x) = \dfrac{x}{x^2+1} = x\varphi(x)$.
Les fonctions $f_\lambda, \lambda \in \mathbb{R}$ s'écrivent $f_\lambda = \lambda\varphi + \psi$.
On a donc $\dfrac{f_\lambda - \psi}{\varphi} = \lambda$. Ainsi, les fonctions $\dfrac{f_\lambda - \psi}{\varphi}$ sont constantes, leur dérivée est identiquement nulle : $\left(\dfrac{f_\lambda - \psi}{\varphi}\right)' = 0$.
Or pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\left(\dfrac{f_\lambda - \psi}{\varphi}\right)(x) = (x^2+1)f_\lambda(x) - x$, donc

$$\left(\frac{f_\lambda - \psi}{\varphi}\right)'(x) = (x^2+1)f_\lambda'(x) + 2xf_\lambda(x) - 1$$

Ainsi les fonctions $f_\lambda, \lambda \in \mathbb{R}$ sont solutions de l'équation différentielle linéaire du premier ordre

$$(x^2+1)y'(x) + 2xy(x) = 1.$$

Pour ce type d'équation, les tangentes des courbes représentatives des solutions en un point fixé sont soit concourantes, soit parallèles.

Exercice 11 (Formule de Stirling)

On considère les fonctions f et g définies sur $]0,+\infty[$ par

$$f(x)=\left(x+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-1 \qquad g(x)=f(x)-\frac{1}{12}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)$$

ainsi que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ donnée par $u_n=\ln\left(\dfrac{n!}{n^{n+1/2}e^{-n}}\right)$.

1. Préliminaire :
   - Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$ pour tout $x\in]0,+\infty[$ ainsi que les limites $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$.
   - Donner le signe de f''. En déduire celui de f' puis celui de f sur $]0,+\infty[$.
   - Mener une étude analogue avec la fonction g.

Exercice 11 (Formule de Stirling)

2. Exprimer $u_{n+1} - u_n$ en fonction de f et de n.
   En déduire le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
3.
   - À l'aide du signe de g, montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$:

   $$\ln(k) > \left(k+\frac{1}{2}\right)\ln(k) - \left(k-\frac{1}{2}\right)\ln(k-1) - 1 - \frac{1}{12}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right).$$

   - En sommant cette inégalité pour k variant de 2 à n, en déduire

   $$\ln(n!) > \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln(n) - n + 1 - \frac{1}{12}\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

   puis que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est minorée.
4. Conclure.

On obtient la célèbre formule de Stirling : il existe un $\lambda > 0$ tel que $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \lambda\, n^{n+1/2} e^{-n}$ (où la notation $f \sim g$ signifie que $\lim f/g = 1$).
En fait, la constante λ est égale à $\sqrt{2\pi}$...

Exercice n° 11

1. - Tout d'abord, notons que la dérivée de $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ est $-\frac{1}{x^2+x}$.
Alors
$$f'(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{x+\frac{1}{2}}{x^2+x} = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{2x+1}{2(x^2+x)}$$
puis
$$f''(x) = -\frac{1}{x^2+x} - \frac{2(x^2+x)-(2x+1)^2}{2(x^2+x)^2}$$
$$= -\frac{2x^2+2x}{2(x^2+x)^2} + \frac{2x^2+2x+1}{2(x^2+x)^2} = \frac{1}{2(x^2+x)^2} > 0.$$

   - D'autre part, écrivons $f(x) = x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - 1$.
Notant que $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{u\to 0^+} \frac{\ln(1+u)}{u} = 1$, on trouve immédiatement $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
On a également $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$.

1. - On a ensuite

$$g'(x) = f'(x) + \frac{1}{12}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+1)^2}\right)$$

puis

$$\begin{aligned} g''(x) &= f''(x) - \frac{1}{6}\left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{(x+1)^3}\right) \\ &= \frac{1}{2(x^2+x)^2} - \frac{3x^2+3x+1}{6(x^2+x)^3} = -\frac{1}{6(x^2+x)^3} < 0. \end{aligned}$$

- D'autre part, on trouve immédiatement

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} g'(x) = 0.$$

Exercice n° 11

1.
- f'' étant positive sur $]0,+\infty[$, f' est croissante sur $]0,+\infty[$.
  Or $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$, donc f' est négative sur $]0,+\infty[$.
  Alors f est décroissante sur $]0,+\infty[$.
  Comme $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, f est positive sur $]0,+\infty[$.
- Un raisonnement similaire montre que g est négative sur $]0,+\infty[$.

x	0	$+\infty$
$f''(x)$	$+$	
f'	$\nearrow$	0
$f'(x)$	$-$	
f	$\searrow$	0
$f(x)$	$+$	

x	0	$+\infty$
$g''(x)$	$-$	
g'	$\searrow$	0
$g'(x)$	$+$	
g	$\nearrow$	0
$g(x)$	$-$	

2. On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \ln\left(\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+3/2}e^{-n-1}} \times \frac{n^{n+1/2}e^{-n}}{n!}\right) \\ &= \ln\left(e\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1/2}\right) \\ &= 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right)\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ &= -f(n) < 0 \end{aligned}$$

Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est **décroissante.**

Exercice nº 11

3. - Réécrivons $g(x)$ selon :

$$g(x) = \left(x+\frac{1}{2}\right)\ln(x+1) - \left(x+\frac{1}{2}\right)\ln(x) - 1 - \frac{1}{12}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right).$$

Pour $x = k-1$, avec $k \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$:

$$g(k-1) = \left(k-\frac{1}{2}\right)\ln(k) - \left(k-\frac{1}{2}\right)\ln(k-1) - 1 - \frac{1}{12}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right).$$

D'après la question précédente, on a $g(k-1) < 0$, donc

$$\begin{aligned}\ln(k) &> g(k-1) + \ln(k)\\ &= \left(k+\frac{1}{2}\right)\ln(k) - \left(k-\frac{1}{2}\right)\ln(k-1) - 1 - \frac{1}{12}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right).\end{aligned}$$

Exercice n° 11

3 • Puis, avec $n! = \prod_{k=2}^{n} k$:

$$\ln(n!) = \sum_{k=2}^{n} \ln(k) > \sum_{k=2}^{n} \left[\left(k+\frac{1}{2}\right)\ln(k) - \left(k-\frac{1}{2}\right)\ln(k-1)\right]$$
$$-(n-1) - \frac{1}{12}\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right).$$

Observant que l'on a affaire à deux sommes téléscopiques :

$$\sum_{k=2}^{n} \left[\left(k+\frac{1}{2}\right)\ln(k) - \left(k-\frac{1}{2}\right)\ln(k-1)\right] = \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln(n)$$

et

$$\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right) = 1 - \frac{1}{n}$$

on obtient finalement :

$$\ln(n!) > \ln\left(n^{n+1/2}\right) - n + \frac{11}{12} + \frac{1}{12n} > \ln\left(n^{n+1/2}e^{-n}\right) + \frac{11}{12}$$

soit $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n > \dfrac{11}{12}$. Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est **minorée.**

Exercice nº 11

3 • En conclusion, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ étant **décroissante** et **minorée**, elle est **convergente**.

Posons alors $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ et $\lambda = \mathrm{e}^{\ell}$. On a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^{n+1/2}e^{-n}} = \lambda.$$

À l'aide des intégrales de Wallis $\int_0^{\pi/2} \sin^n(x)\,\mathrm{d}x$, $n\in\mathbb{N}$, qui s'expriment avec des factorielles, on peut calculer la valeur de la constante λ : $\lambda = \sqrt{2\pi}$...

On en déduit la célèbre **formule de Stirling :**

$$\boxed{n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi}\, n^{n+1/2}e^{-n}}$$

http://math.univ-lyon1.fr/~alachal/diaporamas/diaporama_stirling.pdf

Exercice 12 (Série de Riemann)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \cdots + \frac{1}{n^\alpha}$.

1. On suppose $\alpha > 1$.
   Prouver à l'aide du théorème des accroissements finis l'inégalité
   $$\forall x \in \,]1,+\infty[\,, \quad \frac{1}{x^\alpha} \leqslant \frac{1}{\alpha - 1}\left[\frac{1}{(x-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{x^{\alpha-1}}\right].$$
   En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée, puis convergente.

2. On suppose $\alpha = 1$.
   Prouver à l'aide du théorème des accroissements finis l'encadrement
   $$\forall x \in \,]1,+\infty[\,, \quad \ln(x+1) - \ln(x) \leqslant \frac{1}{x} \leqslant \ln(x) - \ln(x-1).$$
   En déduire un encadrement puis un équivalent simple de u_n lorsque $n \to +\infty$ à l'aide de la fonction ln. Déterminer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

3. Examiner le cas $\alpha < 1$.

Exercice nº 12

Remarque préliminaire : puisque $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{(n+1)^\alpha} > 0$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est **strictement croissante.**

1. **On suppose $\alpha > 1$.**
   - Posons, pour tout $u > 0$, $f(u) = \dfrac{1}{u^{\alpha-1}}$.

     La fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $f'(u) = -\dfrac{\alpha-1}{u^\alpha}$.

     Soit $x > 1$. Appliquons l'inégalité des accroissements finis sur l'intervalle $[x-1, x]$:
     $$f(x) - f(x-1) \leqslant \sup_{u\in]x-1,x[} f'(u).$$
     Puisque $\alpha > 1$, la fonction f' est croissante sur $]0, +\infty[$, donc $\displaystyle\sup_{u\in]x-1,x[} f'(u) = -\frac{\alpha-1}{x^\alpha}$, ce qui donne
     $$\frac{1}{x^\alpha} \leqslant \frac{1}{\alpha-1}\left[\frac{1}{(x-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{x^{\alpha-1}}\right].$$

Exercice nº 12

Remarque préliminaire : puisque $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{(n+1)^\alpha} > 0$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est **strictement croissante.**

1. **On suppose $\alpha > 1$.**
   - On a pour donc tout $k \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$:

$$\frac{1}{k^\alpha} \leqslant \frac{1}{\alpha-1}\left[\frac{1}{(k-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{k^{\alpha-1}}\right]$$

puis en sommant à l'aide d'une somme téléscopique :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant 1 + \frac{1}{\alpha-1}\sum_{k=2}^{n}\left[\frac{1}{(k-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{k^{\alpha-1}}\right]$$
$$\leqslant 1 + \frac{1}{\alpha-1}\left[1 - \frac{1}{n^{\alpha-1}}\right] \leqslant 1 + \frac{1}{\alpha-1} = \frac{\alpha}{\alpha-1}.$$

Ainsi, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est **majorée.**
Comme elle est **croissante,** elle est **convergente.**

2. **On suppose $\alpha = 1$.** Dans ce cas, $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$.

   - La fonction ln est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $\ln'(u) = \frac{1}{u}$.

     Soit $x > 1$. Appliquons l'inégalité des accroissements finis sur l'intervalle $[x-1, x]$:

     $$\inf_{u \in]x-1,x[} \ln'(u) \leqslant \ln(x) - \ln(x-1) \leqslant \sup_{u \in]x-1,x[} \ln'(u).$$

     Puisque la fonction inverse est décroissante sur $]0, +\infty[$, $\inf_{u \in]x-1,x[} \frac{1}{u} = \frac{1}{x}$ et $\sup_{u \in]x-1,x[} \frac{1}{u} = \frac{1}{x-1}$, ce qui donne

     $$\frac{1}{x} \leqslant \ln x - \ln(x-1) \leqslant \frac{1}{x-1}$$

     ou encore, en changeant x en $x+1$ dans la deuxième inégalité :

     $$\ln(x+1) - \ln x \leqslant \frac{1}{x} \leqslant \ln x - \ln(x-1).$$

2. **On suppose** $\alpha = 1$. Dans ce cas, $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$.

   - On a donc pour tout $k \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$:

$$\ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k} \leqslant \ln(k) - \ln(k-1).$$

puis en sommant à l'aide de deux sommes téléscopiques :

$$\sum_{k=1}^{n} \left[\ln(k+1) - \ln(k)\right] \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant 1 + \sum_{k=2}^{n} \left[\ln(k) - \ln(k-1)\right]$$

$$\ln(n+1) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant \ln(n) + 1.$$

Puisque $\lim_{n\to+\infty} \ln(n+1) = +\infty$, on a également $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
Ainsi, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est **divergente.**

Par ailleurs $\ln(n+1) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$ et $\ln(n)+1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$, donc

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n).$$

3. **On suppose $\alpha < 1$.**

Dans ce cas, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{k^\alpha} > \dfrac{1}{k}$, puis en sommant :

$$u_n > \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} > \ln(n)$$

d'où l'on tire que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

En résumé, on a le résultat suivant, en notant $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$:

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est **convergente** si et seulement si $\alpha > 1$

soit encore :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} < +\infty \iff \alpha > 1$$

Exercice 13 (Formule des trapèzes)

Soit f une application de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a, b]$ et g l'application affine telle que $f(a) = g(a)$ et $f(b) = g(b)$.

On pose $I = \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $J = \displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ et $M = \displaystyle\sup_{x\in[a,b]} |f''(x)|$.

1. Déterminer l'expression de $g(x)$ puis calculer l'intégrale J. Interpréter géométriquement le résultat obtenu.
2. On souhaite majorer l'écart entre I et J. Pour cela, on introduit l'application φ définie sur $[a, b]$ par
$$\varphi(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2}(x-a)\,[f(x)+f(a)] - K(x-a)^3$$
où K est la constante déterminée par la condition $\varphi(b) = 0$.
   - Calculer φ' et φ''.
   - Par utilisations répétées du théorème de Rolle, prouver l'existence d'un réel $c \in\,]a, b[$ tel que $K = -\frac{1}{12} f''(c)$.
   - En déduire que $|I - J| \leqslant M\,\frac{(b-a)^3}{12}$.

Exercice 13 (Formule des trapèzes)

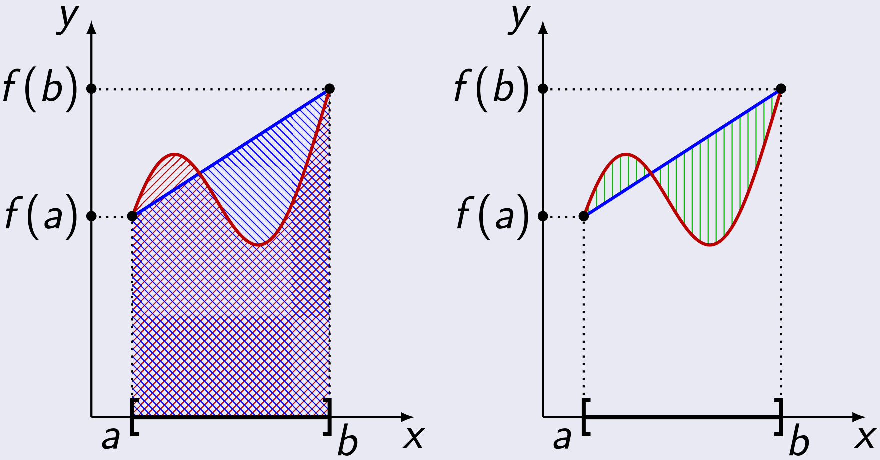
3. On introduit une subdivision $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ de l'intervalle $[a, b]$ en posant $x_k = a + k\,\frac{b-a}{n}$ pour $0 \leqslant k \leqslant n$.
   Vérifier que l'on a

$$\boxed{\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{b-a}{2n}\,[f(a)+2f(x_1)+\cdots+2f(x_{n-1})+f(b)] + \varepsilon_n}$$

   avec $|\varepsilon_n| \leqslant M\,\dfrac{(b-a)^3}{12n^2}$.

4. **Application numérique.**
   À partir de quelle valeur de n peut-on obtenir une approximation de $\ln(2) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t+1}$ à l'aide de la formule précédente avec une erreur inférieure à 10^{-6} ?

1 Tracé



— graphe de f, aire I

— graphe de g, aire J

— différence d'aires $I - J$

Exercice nº 13

1.
- La représentation graphique de g est la droite passant par les points de coordonnées $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$, donc de pente $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Ainsi

$$g(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a).$$

- On a ensuite

$$\begin{aligned} J = \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t &= \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \int_a^b (t - a)\,\mathrm{d}t + \int_a^b f(a)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \times \frac{1}{2}(b - a)^2 + f(a)(b - a) \\ &= (b - a)\,\frac{f(a) + f(b)}{2}. \end{aligned}$$

C'est l'aire du trapèze formé par les points de coordonnées $(a, 0)$, $(a, f(a))$, $(b, f(b))$ et $(b, 0)$.

2. • Remarquons tout d'abord que, f étant une application de classe $\mathcal{C}^2$, φ est également de classe $\mathcal{C}^2$. On peut donc calculer ses dérivées première et seconde. On a

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= f(x) - \frac{1}{2}\,[f(x) + f(a)] - \frac{1}{2}(x-a)f'(x) - 3K(x-a)^2 \\ &= \frac{1}{2}\,[f(x) - f(a)] - \frac{1}{2}(x-a)f'(x) - 3K(x-a)^2\end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned}\varphi''(x) &= \frac{1}{2}\,f'(x) - \frac{1}{2}\,f'(x) - \frac{1}{2}(x-a)f''(x) - 6K(x-a) \\ &= -6(x-a)\left(\frac{1}{12}\,f''(x) + K\right).\end{aligned}$$

2. - Notons que la condition $\varphi(b) = 0$ fournit la valeur de la constante K :

$$K = \frac{\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2}(b-a)\left[f(a)+f(b)\right]}{(b-a)^3} = \frac{I-J}{(b-a)^3}.$$

  ⋆ On a $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. Donc d'après le théorème de Rolle, il existe $d \in \,]a,b[$ tel que $\varphi'(d) = 0$.

  ⋆ Puis $\varphi'(a) = \varphi'(d) = 0$. Donc d'après le théorème de Rolle, il existe $c \in \,]a,d[$ tel que $\varphi''(c) = 0$, soit $K = -\frac{1}{12} f''(c)$.

- On a ensuite

$$I - J = K(b-a)^3 = -\frac{(b-a)^3}{12}\, f''(c).$$

Ainsi

$$|I-J| \leqslant \frac{(b-a)^3}{12}\,|f''(c)| \leqslant M\,\frac{(b-a)^3}{12}.$$

Exercice n° 13

3 • Introduisons $x_k = a + k\frac{b-a}{n}$ pour $0 \leqslant k \leqslant n$. On a $x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n}$.

Posons alors

$$\begin{cases} I_k = \displaystyle\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t)\,\mathrm{d}t \\ J_k = (x_k - x_{k-1})\,\dfrac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} = \dfrac{b-a}{2n}[f(x_{k-1}) + f(x_k)] \end{cases}$$

D'après la question précédente, on a

$$|I_k - J_k| \leqslant M\,\frac{(x_k - x_{k-1})^3}{12} = M\,\frac{(b-a)^3}{12n^3}.$$

On peut ainsi écrire $I_k = J_k + \delta_k$ avec $|\delta_k| \leqslant M\,\dfrac{(b-a)^3}{12n^3}$.

3 • Puis
$$\int_a^b f(t)\,dt = \sum_{k=1}^n I_k = \sum_{k=1}^n J_k + \varepsilon_n$$

avec
$$\sum_{k=1}^n J_k = \frac{b-a}{2n}\sum_{k=1}^n [f(x_{k-1}) + f(x_k)]$$
$$= \frac{b-a}{2n}[f(a) + 2f(x_1) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(b)] = T_n$$

et $\varepsilon_n = \sum_{k=1}^n \delta_k$.

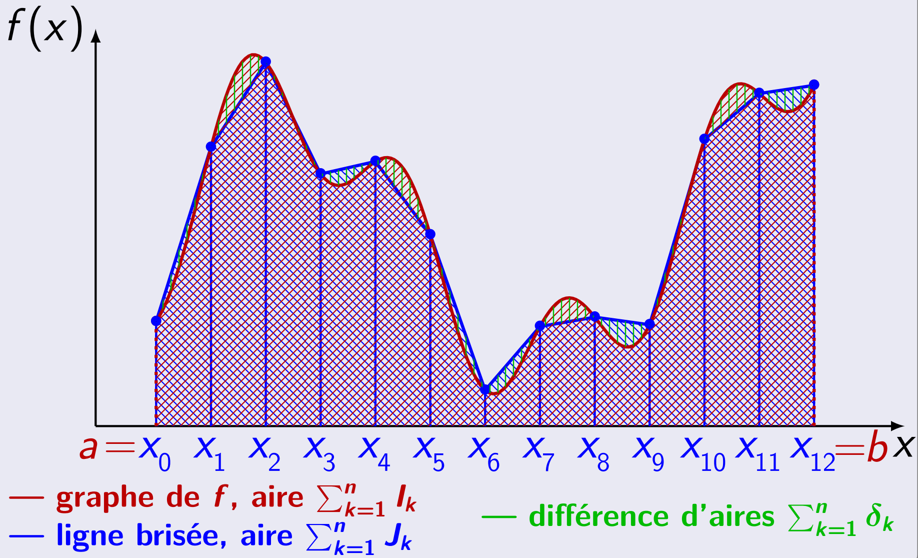
On a enfin
$$|\varepsilon_n| \leqslant \sum_{k=1}^n |\delta_k| \leqslant M\,\frac{(b-a)^3}{12n^2}.$$

• En conclusion :
$$\int_a^b f(t)\,dt = T_n + \varepsilon_n.$$

Ainsi, la quantité T_n est une approximation de l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ avec une erreur de l'ordre de $\frac{1}{n^2}$.

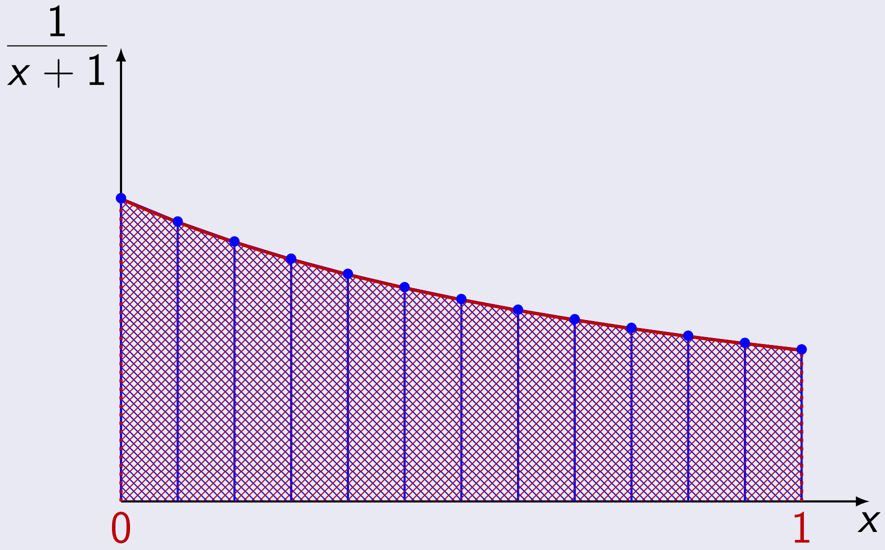
Exercice nº 13

3 Tracé



Exercice n° 13

4 Tracé (exemple)



Exercice nº 13

4. **Application.** Pour $f(t) = \dfrac{1}{t+1}$ sur $[0,1]$, l'approximation de I est donnée par

$$T_n = \frac{1}{2n}\left[f(0) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) + f(1)\right] = \frac{1}{2n}\left[\frac{3}{2} + 2\sum_{k=1}^{n-1}\frac{n}{k+n}\right]$$
$$= \frac{3}{4n} + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+n} = -\frac{3}{4n} + \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+n}.$$

D'autre part, on a $f''(t) = \dfrac{2}{(t+1)^3}$ et $M = \sup\limits_{t\in[0,1]} |f''(t)| = 2$, donc l'erreur de l'approximation vérifie $|\varepsilon_n| \leqslant \dfrac{1}{6n^2}$.

Pour avoir une erreur inférieur à 10^{-6}, il suffit de choisir l'entier n tel que $\dfrac{1}{6n^2} \leqslant 10^{-6}$, c'est-à-dire $n \geqslant \frac{1000}{\sqrt{6}} \approx 408.2$, soit $n \geqslant 409$.

Numériquement on a : $T_n = 0.6931475542\dots$ alors que la valeur exacte est donnée par $\ln 2 = 0.6931471806\dots$

4. Développements limités

Exercice 14 (Formules de Taylor-Lagrange/Young)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La formule de **Taylor-Lagrange** assure l'existence d'une fonction θ_n définie sur $\mathbb{R}^*$ à valeurs dans $]0,1[$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \mathrm{e}^x = 1+x+\frac{1}{2!}\,x^2+\frac{1}{3!}\,x^3+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}\,x^{n-1}+\frac{1}{n!}\,x^n\mathrm{e}^{\theta_n(x)x}$$

et la formule de **Taylor-Young** donne

$$\mathrm{e}^x \underset{x\to 0}{=} 1+x+\frac{1}{2!}\,x^2+\frac{1}{3!}\,x^3+\cdots+\frac{1}{n!}\,x^n+\frac{1}{(n+1)!}\,x^{n+1}+o(x^{n+1}).$$

1. ***Première méthode.***
   - Donner deux équivalents simples de $\mathrm{e}^{\theta_n(x)x}-1$ en 0.
   - En déduire la limite $\lim\limits_{x\to 0}\theta_n(x)$.
2. ***Deuxième méthode.***
   - Calculer explicitement $\theta_n(x)$.
   - À l'aide d'un équivalent de $\ln u$ en 1, retrouver la valeur de $\lim\limits_{x\to 0}\theta_n(x)$.

Exercice 14 (Formules de Taylor-Lagrange/Young)

3. ***Généralisation.*** Soit $n \in \mathbb{N}^*$, f une fonction définie sur un voisinage de 0 à valeurs réelles $n+1$ fois dérivable en 0 telle que $\boldsymbol{f^{(n+1)}(0) \neq 0}$. La fonction f est alors n fois dérivable sur un voisinage I de 0. On pose $I^* = I \backslash \{0\}$.

   La formule de **Taylor-Lagrange** assure l'existence d'une fonction θ_n définie sur I^* à valeurs dans $]0,1[$ telle que
$$\begin{aligned}\forall x \in I^*,\ f(x) \ = \ & f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!}f''(0)\,x^2 + \cdots \\ & + \frac{1}{(n-1)!}f^{(n-1)}(0)\,x^{n-1} + \frac{1}{n!}f^{(n)}(\theta_n(x)x)\,x^n\end{aligned}$$
   et la formule de **Taylor-Young** donne
$$\begin{aligned}f(x) \underset{x\to 0}{=} \ & f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!}f''(0)\,x^2 + \cdots \\ & + \frac{1}{n!}f^{(n)}(0)\,x^n + \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(0)\,x^{n+1} + o(x^{n+1}).\end{aligned}$$
   - Calculer la limite $\lim\limits_{x\to 0} \theta_n(x)$.

Exercice n° 14

1. Posons, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$,

$$P_k(x) = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{k!}x^k.$$

- Les deux formules de Taylor s'écrivent alors

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^x = P_{n-1}(x) + \frac{1}{n!}\,x^n \mathrm{e}^{\theta_n(x)x}$$

et

$$\mathrm{e}^x \underset{x\to 0}{=} P_{n+1}(x) + o(x^{n+1}).$$

En confrontant les deux formules, on trouve

$$\begin{aligned}\frac{1}{n!}\,x^n \mathrm{e}^{\theta_n(x)x} &\underset{x\to 0}{=} P_{n+1}(x) - P_{n-1}(x) + o(x^{n+1}) \\ &\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{n!}\,x^n + \frac{1}{(n+1)!}\,x^{n+1} + o(x^{n+1})\end{aligned}$$

soit encore

$$\mathrm{e}^{\theta_n(x)x} \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{1}{n+1}\,x + o(x).$$

Exercice nº 14

1. On en déduit donc

$$e^{\theta_n(x)x} - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{n+1}\,x.$$

- D'autre part, puisque la fonction θ_n est bornée, on a $\lim\limits_{x\to 0} \theta_n(x)x = 0$, puis, avec $e^u - 1 \underset{u\to 0}{\sim} u$, on trouve :

$$e^{\theta_n(x)x} - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \theta_n(x)x.$$

- En confrontant les deux équivalents précédents, on obtient $\theta_n(x)x \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{n+1}\,x$, d'où l'on tire

$$\lim_{x\to 0} \theta_n(x) = \frac{1}{n+1}.$$

Exercice nº 14

2

- La formule de Taylor-Lagrange fournit explicitement
$$\theta_n(x) = \frac{1}{x} \ln\left[\frac{n!}{x^n}\big(\mathrm{e}^x - P_{n-1}(x)\big)\right].$$
- La formule de Taylor-Young à l'ordre n fournit
$$\mathrm{e}^x - P_{n-1}(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^n}{n!}$$
donc
$$\lim_{x\to 0} \frac{n!}{x^n}\big(\mathrm{e}^x - P_{n-1}(x)\big) = 1.$$
- À l'aide de $\ln u \underset{u\to 1}{\sim} u-1$, on trouve alors
$$\begin{aligned}\theta_n(x) &\underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{x}\left[\frac{n!}{x^n}\big(\mathrm{e}^x - P_{n-1}(x)\big) - 1\right] \\ &= \frac{n!}{x^{n+1}}\big(\mathrm{e}^x - P_n(x)\big).\end{aligned}$$

2

- Enfin, la formule de Taylor-Young à l'ordre $n+1$ fournit

$$e^x - P_n(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

donc

$$\theta_n(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{n+1}$$

d'où l'on tire

$$\lim_{x\to 0} \theta_n(x) = \frac{1}{n+1}.$$

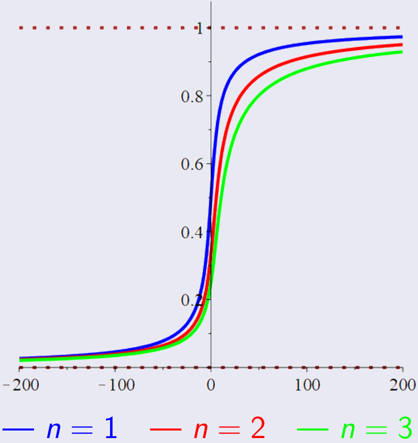
- Quelques exemples :

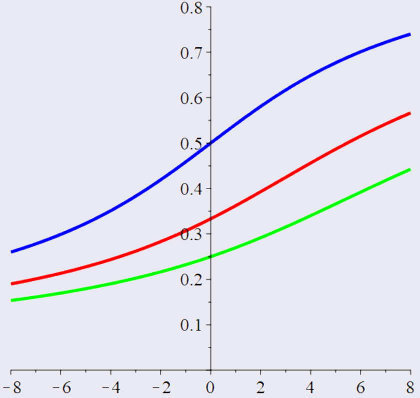
$$\theta_1(x) = \frac{1}{x}\ln\left[\frac{1}{x}\left(e^x - 1\right)\right] \qquad \lim_{x\to 0}\theta_1(x) = \frac{1}{2}$$

$$\theta_2(x) = \frac{1}{x}\ln\left[\frac{2}{x^2}\left(e^x - 1 - x\right)\right] \qquad \lim_{x\to 0}\theta_2(x) = \frac{1}{3}$$

$$\theta_3(x) = \frac{1}{x}\ln\left[\frac{6}{x^3}\left(e^x - 1 - x - \frac{1}{2}x^2\right)\right] \qquad \lim_{x\to 0}\theta_3(x) = \frac{1}{4}$$

Tracé de θ_n





Zoom

3. - La confrontation des deux formules de Taylor pour f fournit

$$f^{(n)}(\theta_n(x)x) \underset{x\to 0}{=} f^{(n)}(0) + \frac{1}{n+1} f^{(n+1)}(0)\, x + o(x).$$

   - D'autre part, la fonction f étant $n+1$ fois dérivable en 0, on a

$$f^{(n)}(u) \underset{u\to 0}{=} f^{(n)}(0) + f^{(n+1)}(0)\, u + o(u)$$

puis, la fonction θ_n étant bornée,

$$f^{(n)}(\theta_n(x)x) \underset{x\to 0}{=} f^{(n)}(0) + f^{(n+1)}(0)\, \theta_n(x)x + o(x)$$

d'où l'on extrait, puisque $f^{(n+1)}(0) \neq 0$, $\theta_n(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{n+1}$.

Ainsi

$$\lim_{x\to 0} \theta_n(x) = \frac{1}{n+1}.$$

Cette limite est indépendante du choix de la fonction initiale f.

Exercice 15 (Formules de Taylor-Lagrange/Young)

La formule de Taylor-Lagrange assure l'existence d'une fonction φ définie sur $\mathbb{R}^*$ à valeurs dans $]0,1[$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \operatorname{sh} x = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 \operatorname{sh}(\varphi(x)x)$$

et la formule de Taylor-Young donne

$$\operatorname{sh} x \underset{x\to 0}{=} x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + o(x^5).$$

1. - Donner deux équivalents simples de $\operatorname{sh}(\varphi(x)x)$ en 0.
   - En déduire la limite $\lim\limits_{x\to 0} \varphi(x)$.
2. - On dénote par $\operatorname{argsh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la bijection réciproque de $\operatorname{sh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Expliciter $\varphi(x)$.
   - Montrer que $\operatorname{argsh} u \underset{u\to 0}{\sim} u$ puis retrouver la valeur de $\lim\limits_{x\to 0} \varphi(x)$.

Exercice 15 (Formules de Taylor-Lagrange/Young)

La formule de Taylor-Lagrange assure l'existence d'une fonction θ définie sur $\mathbb{R}^*$ à valeurs dans $]0,1[$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \operatorname{sh} x = x + \frac{1}{6}\, x^3 \operatorname{ch}(\theta(x)x)$$

et la formule de Taylor-Young donne

$$\operatorname{sh} x \underset{x\to 0}{=} x + \frac{1}{6}\, x^3 + \frac{1}{120}\, x^5 + o(x^5).$$

3.
- Donner deux équivalents simples de $\operatorname{ch}(\theta(x)x) - 1$ en 0.
- En déduire la limite $\lim\limits_{x\to 0} \theta(x)$.

4.
- On dénote par argch : $[1,+\infty[\to [0,+\infty[$ la bijection réciproque de la restriction de ch à l'intervalle $[0,+\infty[$. Expliciter $\theta(x)$.
- Montrer que $\operatorname{argch} u \underset{u\to 1^+}{\sim} \sqrt{2}\,\sqrt{u-1}$ puis retrouver la valeur de $\lim\limits_{x\to 0} \theta(x)$.

Exercice 15 (Formules de Taylor-Lagrange/Young)

5. ***Généralisation.*** Soit $n, p \in \mathbb{N}^*$ tels que $n < p$, f une fonction définie sur un voisinage de 0 à valeurs réelles p fois dérivable en 0 telle que $\boldsymbol{f^{(n+1)}(0) = f^{(n+2)}(0) = \cdots = f^{(p-1)}(0) = 0}$ et $\boldsymbol{f^{(p)}(0) \neq 0}$. La fonction f est alors $p-1$ fois dérivable sur un voisinage I de 0.

   La formule de **Taylor-Lagrange** assure l'existence d'une fonction θ_n définie sur $I^* = I \backslash \{0\}$ à valeurs dans $]0,1[$ telle que

$$\begin{aligned}\forall x \in I^*,\ f(x) \ &= \ f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2} f''(0)\, x^2 + \cdots \\ &\quad + \frac{1}{(n-1)!} f^{(n-1)}(0)\, x^{n-1} + \frac{1}{n!} f^{(n)}(\theta_n(x)x)\, x^n\end{aligned}$$

   et la formule de **Taylor-Young** donne

$$\begin{aligned}f(x) \underset{x\to 0}{=} \ & f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2} f''(0)\, x^2 + \cdots \\ & + \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)\, x^n + \frac{1}{p!} f^{(p)}(0)\, x^p + o(x^p).\end{aligned}$$

   - Calculer la limite $\lim\limits_{x\to 0} \theta_n(x)$.

Exercice nº 15

1. - D'une part, en comparant les deux formules de Taylor, on voit que
$$\frac{1}{24}\,x^4\,\mathrm{sh}(\varphi(x)x) \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{120}\,x^5 + o(x^5),$$
qui conduit à l'équivalence
$$\mathrm{sh}(\varphi(x)x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{5}\,x.$$
   - D'autre part, puisque la fonction φ est bornée, on a $\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x)x = 0$, puis, avec $\mathrm{sh}\,u \underset{u\to 0}{\sim} u$, on trouve :
$$\mathrm{sh}(\varphi(x)x) \underset{x\to 0}{\sim} \varphi(x)x.$$
   - En confrontant les deux équivalents précédents, on obtient $\varphi(x)x \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{5}\,x$, soit encore $\varphi(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{5}$. En d'autres termes :
$$\lim_{x\to 0}\varphi(x) = \frac{1}{5}.$$

Exercice nº 15

2. - D'après la définition de $\varphi(x)$, on a

$$\operatorname{sh}(\varphi(x)x) = \frac{24}{x^4}\left(\operatorname{sh} x - x - \frac{1}{6}x^3\right).$$

- La fonction sh étant continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $\lim_{x\to-\infty} \operatorname{sh} x = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} \operatorname{sh} x = +\infty$, elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

  On note $\operatorname{argsh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sa réciproque.
- Partant de $\operatorname{sh} v \underset{v\to 0}{\sim} v$, on trouve, en posant $v = \operatorname{argsh} u$ (ou $u = \operatorname{sh} v$) avec $u \to 0$: $\operatorname{argsh} u \underset{u\to 0}{\sim} u$.

2.
- La fonction φ est alors explicitement donnée par

$$\varphi(x) = \frac{1}{x}\,\mathrm{argsh}\left(\frac{24}{x^4}\left(\mathrm{sh}\,x - x - \frac{1}{6}\,x^3\right)\right).$$

- Puisque $\mathrm{sh}\,x - x - \frac{1}{6}\,x^3 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^5}{120}$, on a

$$\lim_{x\to 0} \frac{24}{x^4}\left(\mathrm{sh}\,x - x - \frac{1}{6}\,x^3\right) = 0,$$

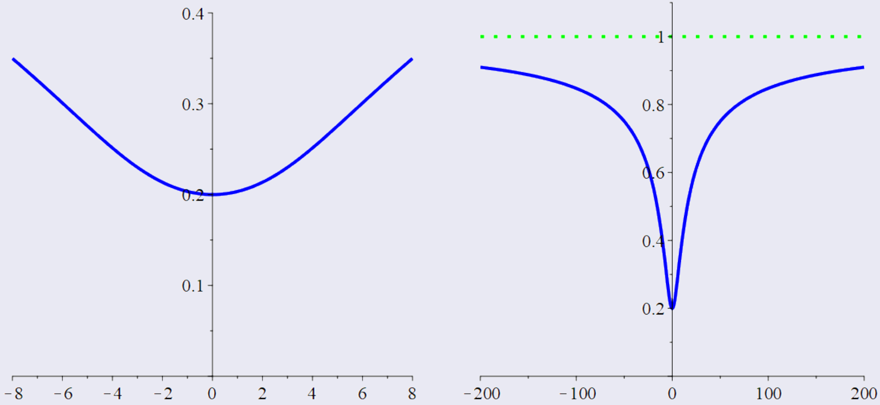
donc

$$\mathrm{argsh}\left(\frac{24}{x^4}\left(\mathrm{sh}\,x - x - \frac{1}{6}\,x^3\right)\right) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{24}{x^4}\left(\mathrm{sh}\,x - x - \frac{1}{6}\,x^3\right) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x}{5}.$$

On retrouve

$$\lim_{x\to 0} \varphi(x) = \frac{1}{5}.$$

Tracé de φ



Zoom

3
- D'une part, en comparant les deux formules de Taylor, on voit que $$\frac{1}{6}\,x^3\,\mathrm{ch}(\theta(x)x) \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{6}\,x^3 + \frac{1}{120}\,x^5 + o(x^5),$$ qui conduit à l'équivalence $$\mathrm{ch}(\theta(x)x) - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{20}\,x^2.$$
- D'autre part, puisque la fonction θ est bornée, on a $\lim\limits_{x\to 0}\theta(x)x = 0$, puis, avec $\mathrm{ch}\,u - 1 \underset{u\to 0}{\sim} \frac{1}{2}\,u^2$, on trouve : $$\mathrm{ch}(\theta(x)x) - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{2}\,\theta(x)^2x^2.$$
- En confrontant les deux équivalents précédents, on obtient $\theta(x)^2x^2 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{10}\,x^2$, soit encore $\theta(x)^2 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{10}$.
  Enfin puisque la fonction θ est à valeurs positives, on en tire $$\lim_{x\to 0}\theta(x) = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

4. - D'après la définition de $\theta(x)$, on a
$$\operatorname{ch}(\theta(x)x) = \frac{6}{x^3}(\operatorname{sh} x - x).$$
- La fonction ch étant continue et strictement croissante sur l'intervalle $[0, +\infty[$, $\operatorname{ch}(0) = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{ch} x = +\infty$, elle induit une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[1, +\infty[$.

  On note $\operatorname{argch} : [1, +\infty[\to [0, +\infty[$ sa réciproque.

  La fonction θ étant à valeurs positives, on a alors
$$\theta(x) = \frac{1}{|x|} \operatorname{argch}\left(\frac{6}{x^3}(\operatorname{sh} x - x)\right).$$
- Partant de $\operatorname{ch} v - 1 \underset{v\to 0}{\sim} \dfrac{1}{2} v^2$, on trouve, en posant $v = \operatorname{argch} u$ (ou $u = \operatorname{ch} v$) avec $u \to 1^+$: $u - 1 \underset{u\to 1^+}{\sim} \dfrac{1}{2} (\operatorname{argch} u)^2$ soit encore, puisque $\operatorname{argch} u \geqslant 0$: $\operatorname{argch} u \underset{u\to 1^+}{\sim} \sqrt{2}\sqrt{u-1}$.

4 • Puisque $\operatorname{sh} x - x \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^3}{6}$, on a $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{6}{x^3}(\operatorname{sh} x - x) = 1$, donc

$$\operatorname{argch}\left(\frac{6}{x^3}(\operatorname{sh} x - x)\right) \underset{x\to 0}{\sim} \sqrt{2}\sqrt{\frac{6}{x^3}(\operatorname{sh} x - x) - 1}$$
$$= \sqrt{2}\sqrt{\frac{6}{x^3}\left(\operatorname{sh} x - x - \frac{x^3}{6}\right)}$$

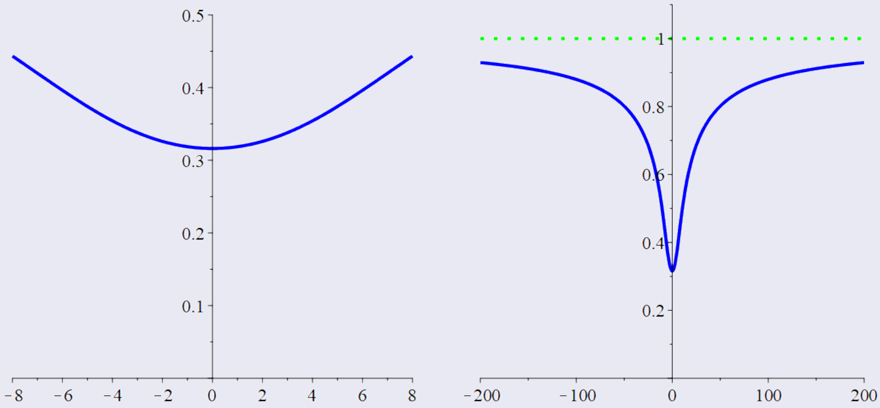
puis, avec $\operatorname{sh} x - x - \dfrac{x^3}{6} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^5}{120}$:

$$\operatorname{argch}\left(\frac{6}{x^3}(\operatorname{sh} x - x)\right) \underset{x\to 0}{\sim} \sqrt{\frac{x^2}{10}} = \frac{|x|}{\sqrt{10}}.$$

On retrouve finalement

$$\lim_{x\to 0} \theta(x) = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Tracé de θ



Zoom

5
- La confrontation des deux formules de Taylor pour f fournit

$$f^{(n)}(\theta_n(x)x) \underset{x\to 0}{=} f^{(n)}(0) + \frac{n!}{p!} f^{(p)}(0)\, x^{p-n} + o(x^{p-n}).$$

- D'autre part, la fonction f étant p fois dérivable en 0, la fonction $f^{(n)}$ est $p-n$ fois dérivable en 0 et la formule de Taylor-Young pour $f^{(n)}$ à l'ordre $p-n$ fournit, avec $f^{(n+1)}(0) = \cdots = f^{(p-1)}(0) = 0$:

$$f^{(n)}(u) \underset{u\to 0}{=} f^{(n)}(0) + \frac{1}{(p-n)!} f^{(p)}(0)\, u^{p-n} + o(u^{p-n})$$

puis, la fonction θ_n étant bornée,

$$f^{(n)}(\theta_n(x)x) \underset{u\to 0}{=} f^{(n)}(0) + \frac{1}{(p-n)!} f^{(p)}(0)\, \theta_n(x)^{p-n} x^{p-n} + o(x^{p-n})$$

d'où l'on extrait, puisque $f^{(p)}(0) \neq 0$, $\theta_n(x)^{p-n} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{n!(p-n)!}{p!} = \frac{1}{\binom{p}{n}}$.

Ainsi, $\theta_n(x)$ étant positif,

$$\lim_{x\to 0} \theta_n(x) = \frac{1}{\binom{p}{n}^{1/(p-n)}}.$$

Exercice 16

Déterminer le développement limité d'ordre 4 en 0 de la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}.$$

On devra partir des développements limités d'ordre 7 de $\sin x$ et $\operatorname{sh} x$ et il sera judicieux d'utiliser le développement limité d'ordre 3 en 0 de $(1+u)^{-2}$.

Exercice nº 16

- Notons tout d'abord, puisque $\operatorname{sh} x \underset{x\to 0}{\sim} x$ et $\sin x \underset{x\to 0}{\sim} x$, que $\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{x^2}$ et $\dfrac{1}{\sin^2 x} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{x^2}$. Donc $f(x) \underset{x\to 0}{=} o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.
Il n'est pas certain *a priori* que f admette un développement limité en 0.
En ébauchant un développement limité en 0 d'ordre n par exemple de $\operatorname{sh} x$:

$$\operatorname{sh} x \underset{x\to 0}{=} x + \cdots + o(x^n) \underset{x\to 0}{=} x\left(1 + \cdots + o(x^{n-1})\right)$$

on trouve

$$\begin{aligned}\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} &\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{x^2}\left(1 + \cdots + o(x^{n-1})\right)^{-2} \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{x^2}\left(1 + \cdots + o(x^{n-1})\right)\\ &\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{x^2} + \cdots + o(x^{n-3})\end{aligned}$$

et de même pour $\dfrac{1}{\sin^2 x}$.
Ainsi, si f admet un développement limité en 0 d'ordre 4, il faut choisir n tel que $n - 3 = 4$, c'est-à-dire $n = 7$.

Exercice n° 16

- On rappelle que

$$\operatorname{sh} x \underset{x\to 0}{=} x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + \frac{1}{5040}x^7 + o(x^7),$$
$$\sin x \underset{x\to 0}{=} x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7 + o(x^7).$$

- En écrivant

$$\operatorname{sh} x \underset{x\to 0}{=} x\left(1 + \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{120}x^4 + \frac{1}{5040}x^6 + o(x^6)\right)$$

ainsi que $\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x} = \operatorname{sh}^{-2} x$ et de même pour sin, on voit que $\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$ et $\dfrac{1}{\sin^2 x}$ sont de la forme $\dfrac{1}{x^2}\big(1 + u(x)\big)^{-2}$ avec

$$u(x) \underset{x\to 0}{=} \sigma\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{120}x^4 + \sigma\frac{1}{5040}x^6 + o(x^6)$$

et $\sigma = +$ pour sh et $\sigma = -$ pour sin.

Exercice n° 16

- On calcule le développement limité d'ordre 6 en $x = 0$ de $\big(1 + u(x)\big)^{-2}$ à l'aide d'un développement limité en $u = 0$ de $(1+u)^{-2}$.

  Plus précisément, puisque $u(x) \underset{x\to 0}{\sim} \sigma \frac{1}{6} x^2$, on a besoin du développement limité d'ordre 3 en 0 suivant :

$$(1+u)^{-2} \underset{u\to 0}{=} 1 - 2u + 3u^2 - 4u^3 + o(u^3).$$

  Notons que $o(u(x)^3) = o(x^6)$.

Exercice nº 16

- En substituant $u(x)$ à u, il vient :

$$
\begin{aligned}
\big(1+u(x)\big)^{-2} &\underset{x\to 0}{=} 1 - 2u(x) + 3u(x)^2 - 4u(x)^3 + o(u(x)^3) \\
&\underset{x\to 0}{=} 1 - 2\left(\sigma\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{120}x^4 + \sigma\frac{1}{5040}x^6\right) \\
&\qquad + 3\left(\sigma\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{120}x^4 + \sigma\frac{1}{5040}x^6\right)^2 \\
&\qquad - 4\left(\sigma\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{120}x^4 + \sigma\frac{1}{5040}x^6\right)^3 + o(x^6) \\
&\underset{x\to 0}{=} 1 - \sigma\frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{60}x^4 - \sigma\frac{1}{2520}x^6 \\
&\qquad + 3\left(\frac{1}{36}x^4 + \sigma\frac{1}{360}x^6\right) - 4\left(\sigma\frac{1}{216}x^6\right) + o(x^6) \\
&\underset{x\to 0}{=} 1 - \sigma\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{15}x^4 - \sigma\frac{2}{189}x^6 + o(x^6)
\end{aligned}
$$

- Ainsi, on notant u_+ (resp. u_-) l'expression de u relative au signe $\sigma = +$ (resp. $\sigma = -$) :

$$\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} = \frac{1}{x^2}\big(1+u_+(x)\big)^{-2} \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{15}x^2 - \frac{2}{189}x^4 + o(x^4)$$
$$\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} = \frac{1}{x^2}\big(1+u_-(x)\big)^{-2} \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{x^2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{15}x^2 + \frac{2}{189}x^4 + o(x^4)$$

puis, par différence :

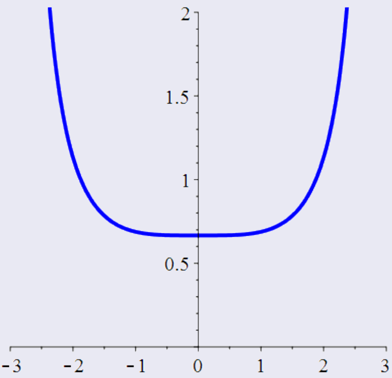
$$f(x) = \frac{2}{3} + \frac{4}{189}x^4 + o(x^4).$$

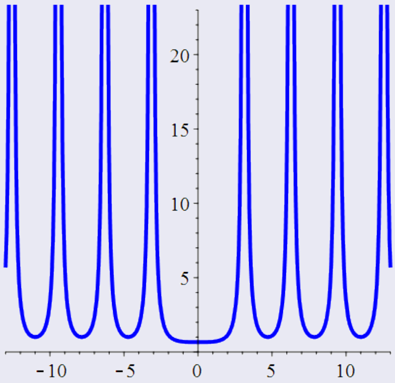
En particulier, on obtient

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{2}{3}$$

et que la courbe représentative de f admet une tangente horizontale au point d'abscisse 0, la courbe étant au-dessus de cette tangente au voisinage de 0.

Tracé de f





Exercice 17

Soit f la fonction définie par $f(x) = (x^2 - 1)\arctan\left(\dfrac{1}{2x-1}\right)$.

1. En utilisant la formule

$$\arctan x + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\dfrac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

   calculer les développements limités de f en $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{+}$ et $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-}$ d'ordre 2.

   La fonction f est-elle prolongeable par continuité en $\dfrac{1}{2}$?

   En déduire la représentation graphique locale de f au voisinage de $\dfrac{1}{2}$.

2. Déterminer un développement asymptotique en $\pm\infty$ de la forme

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

   En déduire la représentation graphique locale de f au voisinage de $\pm\infty$.

Exercice n° 17

1. Posons $h = x - \frac{1}{2}$, ou encore $x = \frac{1}{2} + h$, et notons $\sigma(h)$ le signe de h. On a, à l'aide du développement limité $\arctan u = u + o(u^2)$:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \left(-\frac{3}{4} + h + h^2\right) \arctan\left(\frac{1}{2h}\right) \\
&= \left(-\frac{3}{4} + h + h^2\right)\left(\sigma(h)\frac{\pi}{2} - \arctan(2h)\right) \\
&\underset{h\to 0}{=} \left(-\frac{3}{4} + h + h^2\right)\left(\sigma(h)\frac{\pi}{2} - 2h + o(h^2)\right) \\
&\underset{h\to 0}{=} -\sigma(h)\frac{3\pi}{8} + \frac{\sigma(h)\pi + 3}{2} h + \frac{\sigma(h)\pi - 4}{2} h^2 + o(h^2).
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$f(x) \underset{x\to\frac{1}{2}^+}{=} -\frac{3\pi}{8} + \frac{\pi+3}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right) - \frac{4-\pi}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + o\left(\left(x - \frac{1}{2}\right)^2\right)$$

$$f(x) \underset{x\to\frac{1}{2}^-}{=} \frac{3\pi}{8} - \frac{\pi-3}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right) - \frac{4+\pi}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + o\left(\left(x - \frac{1}{2}\right)^2\right)$$

Exercice nº 17

1. - On en déduit que

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}^+} f(x) = -\frac{3\pi}{8} \quad \text{et} \lim_{x \to \frac{1}{2}^-} f(x) = \frac{3\pi}{8}$$

soit $\lim_{x \to \frac{1}{2}^+} f(x) \neq \lim_{x \to \frac{1}{2}^-} f(x)$, donc f n'admet pas de limite en $\frac{1}{2}$, elle n'est pas prolongeable par continuité en $\frac{1}{2}$.
En revanche on peut définir des prolongements par continuité $\hat{f}$ et $\check{f}$ à droite et à gauche en $\frac{1}{2}$ en posant $\hat{f}\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3\pi}{8}$ et $\check{f}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3\pi}{8}$.

1. - Le développement limité de f à droite en $\dfrac{1}{2}$ indique que la courbe représentative de $\hat{f}$ admet une demi-tangente au point de coordonnées $\left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{3\pi}{8}\right)$ d'équation

$$y = \frac{\pi+3}{2}x - \frac{5\pi+6}{8}$$

et que la courbe est au-dessous de sa demi-tangente.

En effet :

$$\hat{f}(x) - \left[-\frac{3\pi}{8} + \frac{\pi+3}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right] \underset{x\to\frac{1}{2}^+}{\sim} -\frac{4-\pi}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$$

écart négatif au voisinage de $\dfrac{1}{2}$ à droite.

1. - Le développement limité de f à gauche en $\frac{1}{2}$ indique que la courbe représentative de $\check{f}$ admet une demi-tangente au point de coordonnées $\left(\frac{1}{2}, \frac{3\pi}{8}\right)$ d'équation

$$y = -\frac{\pi - 3}{2}x + \frac{5\pi - 6}{8}$$

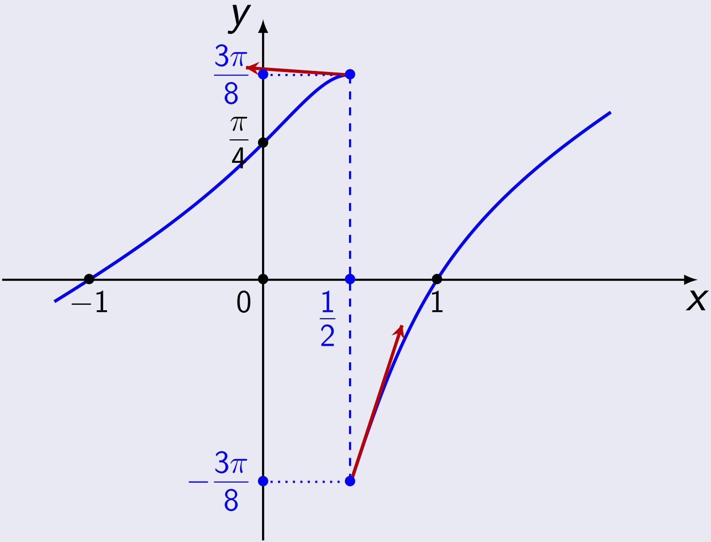
et que la courbe est au-dessous de sa demi-tangente.

En effet :

$$\check{f}(x) - \left[\frac{3\pi}{8} - \frac{\pi - 3}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)\right] \underset{x \to \frac{1}{2}^-}{\sim} -\frac{4+\pi}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$$

écart négatif au voisinage de $\frac{1}{2}$ à gauche.

1 Tracé au voisinage de $1/2$



Exercice n° 17

2. Posons $u = \dfrac{1}{x}$, ou encore $x = \dfrac{1}{u}$. On a, à l'aide du développement limité $\arctan v \underset{v \to 0}{=} v - \frac{1}{3}v^3 + o(v^3)$ et d'une division suivant les puissances croissantes :

$$\begin{aligned}
f(x) &= \left(\frac{1}{u^2} - 1\right)\arctan\left(\frac{u}{2-u}\right)\\
&\underset{u\to 0}{=} \frac{1}{u^2}(1-u^2)\arctan\left(\frac{1}{2}u + \frac{1}{4}u^2 + \frac{1}{8}u^3 + o(u^3)\right)\\
&\underset{u\to 0}{=} \frac{1}{u^2}(1-u^2)\left(\frac{1}{2}u + \frac{1}{4}u^2 + \frac{1}{12}u^3 + o(u^3)\right)\\
&\underset{u\to 0}{=} \frac{1}{u^2}\left(\frac{1}{2}u + \frac{1}{4}u^2 - \frac{5}{12}u^3 + o(u^3)\right)\\
&\underset{u\to 0}{=} \frac{1}{2u} + \frac{1}{4} - \frac{5}{12}u + o(u).
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$f(x) \underset{x\to\pm\infty}{=} \frac{x}{2} + \frac{1}{4} - \frac{5}{12x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

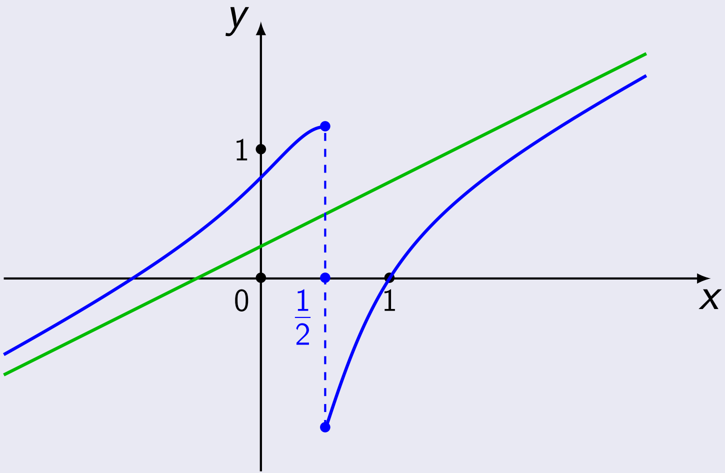
Exercice n° 17

2. - Le développement asymptotique de f en $\pm\infty$ indique la présence d'une asymptote d'équation $y = \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{4}$ et que la courbe représentative de f se situe au-dessous de son asymptote en $+\infty$, au-dessus de son asymptote en $-\infty$.

   En effet :
   $$f(x) - \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\right) \underset{x\to\pm\infty}{\sim} -\frac{5}{12x}$$
   écart négatif au voisinage de $+\infty$, positif au voisinage de $-\infty$.

Exercice n° 17

2 Tracé au voisinage de $+\infty$



5. Intégration

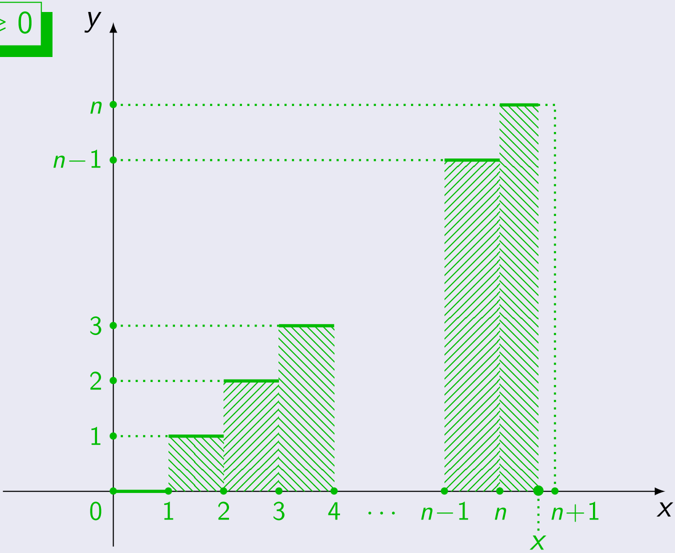
Exercice 18 (Primitive de la partie entière)

On note E la fonction « partie entière ». Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \displaystyle\int_0^x \mathrm{E}(u)\,\mathrm{d}u$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1. Par des considérations géométriques, calculer $F(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On distinguera les cas $x \geqslant 0$ et $x \leqslant 0$; on pourra introduire $n = \mathrm{E}(x)$.
2. Étudier la continuité et la dérivabilité de la fonction F sur $\mathbb{R}$. Tracer la courbe représentative de F.
3. Montrer que $F(1-x) = F(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$; on distinguera les cas $x \in \mathbb{Z}$ et $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$.
   En déduire que la courbe représentative de F présente une symétrie que l'on précisera.

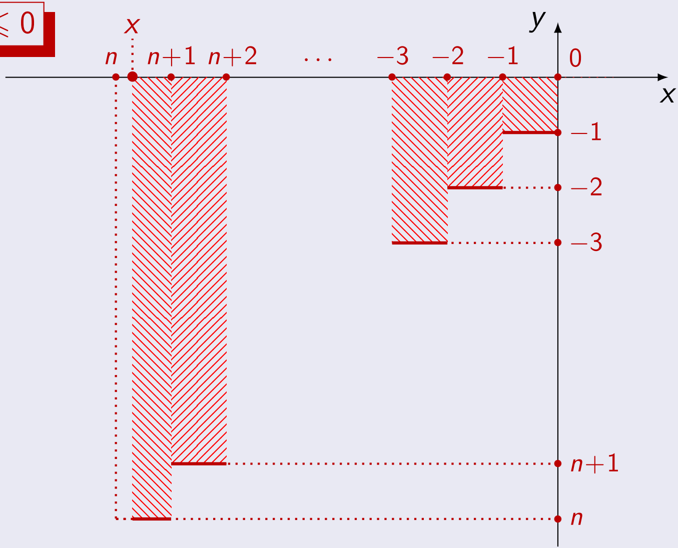
1 Graphe de E sur $[0, +\infty[$

Cas $x \geqslant 0$



① Graphe de E sur $]-\infty, 0[$

Cas $x \leqslant 0$



Exercice nº 18

1. - Si $x \in [0,1]$, on a $F(x) = 0$.
   - Supposons $x \geqslant 1$.

$$F(x) = \sum_{k=0}^{n-1} k + n(x-n) = \frac{1}{2}n(n-1) + n(x-n) = n\left(x - \frac{n+1}{2}\right).$$

   - Supposons $x \leqslant 0$.

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x \mathrm{E}(u)\,\mathrm{d}u = -\int_x^0 \mathrm{E}(u)\,\mathrm{d}u \\ &= -\left(\sum_{k=1}^{-(n+1)} (-k) + n(n+1-x)\right) = \sum_{k=1}^{-(n+1)} k + n(x-n-1) \\ &= \frac{1}{2}n(n+1) + n\big(x-(n+1)\big) = n\left(x - \frac{n+1}{2}\right). \end{aligned}$$

En conclusion, dans tous les cas : $F(x) = \mathrm{E}(x)\left(x - \dfrac{\mathrm{E}(x)+1}{2}\right)$.

Exercice nº 18

2

- La fonction E étant continue sur $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$, la fonction F est également continue au moins sur $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$.
- Soit $n \in \mathbb{Z}$. On a :

$$\lim_{\substack{x\to n\\ x>n}} F(x) = \lim_{\substack{x\to n\\ x>n}} n\left(x - \frac{n+1}{2}\right) = \frac{n(n-1)}{2}$$

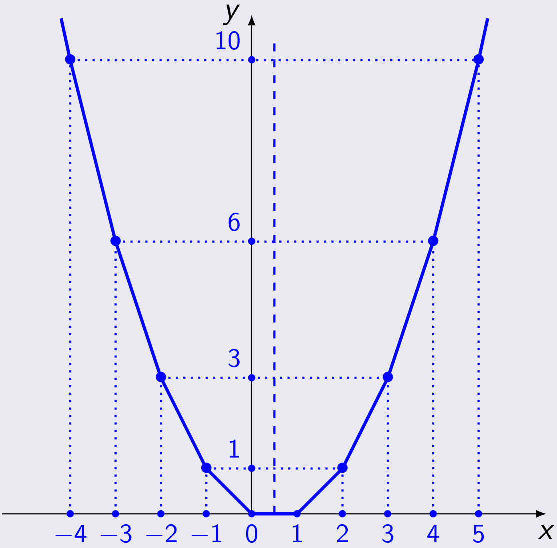
$$\lim_{\substack{x\to n\\ x<n}} F(x) = \lim_{\substack{x\to n\\ x<n}} (n-1)\left(x - \frac{n}{2}\right) = \frac{n(n-1)}{2}$$

On a $\lim\limits_{\substack{x\to n\\ x>n}} F(x) = \lim\limits_{\substack{x\to n\\ x<n}} F(x) = F(n)$, donc F est continue en n.

- Ainsi, F est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice nº 18

② Graphe de F sur $\mathbb{R}$



Exercice n° 18

3.
- Si $x \in \mathbb{Z}$, $F(x) = \frac{1}{2}x(x-1)$ et
  $F(1-x) = \frac{1}{2}(1-x)(-x) = \frac{1}{2}x(x-1)$ donc $F(1-x) = F(x)$.
- Soit $x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}$. Posons $\mathrm{E}(x) = n$. On a $x \in]n, n+1[$,
  donc $1-x \in]-n, 1-n[$, soit $\mathrm{E}(1-x) = -n$.
  Ainsi $\mathrm{E}(1-x) = -\mathrm{E}(x)$, puis :

$$\begin{aligned} F(1-x) &= \mathrm{E}(1-x)\left(1-x-\frac{\mathrm{E}(1-x)+1}{2}\right) \\ &= -\mathrm{E}(x)\left(-x+\frac{\mathrm{E}(x)+1}{2}\right) \\ &= \mathrm{E}(x)\left(x-\frac{\mathrm{E}(x)+1}{2}\right) \\ &= F(x). \end{aligned}$$

- Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $F(1-x) = F(x)$.
  La courbe est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = 2$.

Exercice 19 (Une fraction rationnelle)

Soit $F(x) = \dfrac{5x^5 + 10}{(x+1)^5 - x^5 - 1}$.

1. Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ la fonction rationnelle F.
   On pourra poser $\mathrm{j} = \dfrac{-1 + \mathrm{i}\sqrt{3}}{2} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi/3}$ et remarquer que $\mathrm{j}^3 = 1$, $\mathrm{j}^2 = \bar{\mathrm{j}}$ et $\mathrm{j}^2 + \mathrm{j} + 1 = 0$.
2. En déduire les primitives de F sur $\mathbb{R}$.

Exercice nº 19

- ***Factorisation du dénominateur et pôles de la fraction***
  Le dénominateur de F se factorise selon
  $$(x+1)^5 - x^5 - 1 = 5(x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x) = 5x(x+1)(x^2+x+1).$$
  La fonction rationnelle F se simplifie selon
  $$F(x) = \frac{x^5+2}{x(x+1)(x^2+x+1)}.$$
  La fonction rationnelle F admet donc deux pôles **réels simples** $\mathbf{0}$ et $\mathbf{-1}$ et deux pôles **complexes simples** $\mathbf{j}$ et $\bar{\mathbf{j}}$.

- ***Calcul de la partie entière***
  La division euclidienne de x^5+2 par $x^4+2x^3+2x^2+x$ donne pour quotient la **partie entière** de F qui sera de degré 1.
  Il suffit en fait d'effectuer seulement la division **« partielle »** de x^5 par x^4+2x^3 :
  $$\begin{array}{r|l} x^5 & x^4+2x^3 \\ \hline -2x^4 & x-2 \end{array}$$
  soit $E(x) = x - 2.$

Exercice nº 19

- ***Forme de la décomposition***

  La fonction rationnelle f admet une décomposition de la forme

$$F = E + G_1 + G_2 + G_3$$

avec

$$G_1(x) = \frac{a}{x} \quad G_2(x) = \frac{b}{x+1} \quad G_3(x) = \frac{cx+d}{x^2+x+1}$$

les coefficients a, b, c, d étant **réels**.
$G_1(x)$ et $G_2(x)$ sont des **éléments simples de première espèce,** et $G_3(x)$ est un **élément simple de deuxième espèce.**

Exercice nº 19

- ***Calcul des coefficients***
  - ∗ On trouve a en multipliant $F(x)$ par x et en faisant tendre x vers 0 : $a = \lim_{x\to 0} xF(x) = 2$.
  - ∗ On trouve b en multipliant $F(x)$ par $x+1$ et en faisant tendre x vers -1 : $b = \lim_{x\to -1}(x+1)F(x) = -1$.
  - ∗ On trouve c et d en multipliant $F(x)$ par x^2+x+1 et en faisant tendre x vers j :

    $$\mathrm{j}c + d = \lim_{x\to \mathrm{j}}(x^2+x+1)F(x) = \frac{\mathrm{j}^5+2}{\mathrm{j}^2+\mathrm{j}} = -\bar{\mathrm{j}} - 2 = \frac{-3+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$$

    d'où le système $d - \frac{1}{2}c = -\frac{3}{2}$ et $\frac{\sqrt{3}}{2}c = \frac{\sqrt{3}}{2}$
    duquel on tire $c = 1$ et $d = -1$.

- ***Décomposition en éléments simples***

$$F(x) = x - 2 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{x-1}{x^2+x+1}.$$

- ***Calcul des primitives***

  * L'élément simple de deuxième espèce s'intègre selon

$$\int \frac{x-1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x - \frac{3}{2}\int \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) - \sqrt{3}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + Cste.$$

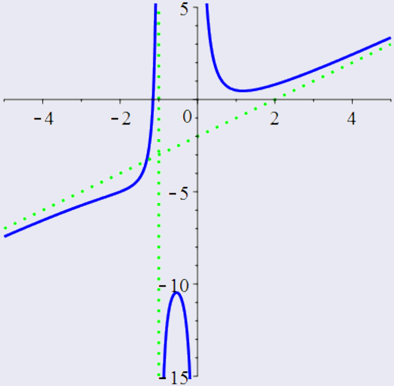
  * Ainsi :

$$\int F(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2\ln|x| - \ln|x+1|$$

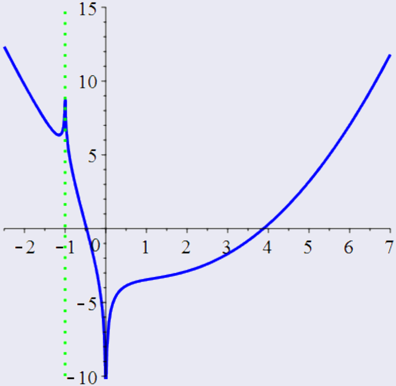
$$+\frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) - \sqrt{3}\arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + Cste.$$

Exercice nº 19

Tracés



$$x \mapsto \frac{5x^5+10}{(x+1)^5-x^5-1}$$



$$x \mapsto \tfrac{1}{2}x^2 - 2x + 2\ln|x| - \ln|x+1| + \tfrac{1}{2}\ln(x^2+x+1) - \sqrt{3}\arctan\left(\tfrac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)$$

Exercice 20 (Une fraction rationnelle)

1. On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{6}{x(x+1)(x+2)(x+3)}.$$

   - Effectuer la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle f.
   - Calculer les primitives de f sur $]0,+\infty[$.
     Déterminer celle dont la limite en $+\infty$ est nulle. On l'exprimera sous la forme du logarithme d'une fraction rationnelle.

2. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} f(k) = f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(n).$$

   Calculer u_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ puis déterminer sa limite $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 20 (Une fraction rationnelle)

3. ***Généralisation.*** On fixe un entier $p \in \mathbb{N}^*$ et l'on introduit la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{p!}{x(x+1)(x+2)\dots(x+p)}.$$

   - Effectuer la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle f.
   - Calculer les primitives de f sur $]0, +\infty[$.
     Déterminer celle dont la limite en $+\infty$ est nulle. On l'exprimera sous la forme du logarithme d'une fraction rationnelle.

4. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} f(k) = f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(n).$$

Calculer u_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ puis déterminer sa limite $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Exercice n° 20

1. **_Décomposition en éléments simples_**

La fraction f admet 4 pôles réels simples 0, -1, -2, -3 et son degré est -4. Sa partie entière est nulle et sa décomposition en éléments simples est de la forme

$$f(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x+2} + \frac{d}{x+3}.$$

Les coefficients a, b, c, d se calculent aisément selon

- $a = \lim_{x\to 0} x\,f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{6}{(x+1)(x+2)(x+3)} = 1$
- $b = \lim_{x\to -1} (x+1)f(x) = \lim_{x\to -1} \frac{6}{x(x+2)(x+3)} = -3$
- $c = \lim_{x\to -2} (x+2)f(x) = \lim_{x\to -2} \frac{6}{x(x+1)(x+3)} = 3$
- $d = \lim_{x\to -3} (x+3)f(x) = \lim_{x\to -3} \frac{6}{x(x+1)(x+2)} = -1$

Exercice nº 20

1. **Calcul de primitives**

Partant de la décomposition $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{3}{x+1} + \frac{3}{x+2} - \frac{1}{x+3}$, on peut calculer facilement les primitives de f sur $]0, +\infty[$:

$$\int f(x)\,dx = \ln(x) - 3\ln(x+1) + 3\ln(x+2) - \ln(x+3) + Constante$$
$$= \ln\big(G(x)\big) + Constante$$

où l'on a posé $G(x) = \dfrac{x(x+2)^3}{(x+1)^3(x+3)}$.

On a $\lim_{x\to+\infty} G(x) = 1$, puis $\lim_{x\to+\infty} \ln\big(G(x)\big) = 0$.

Donc la primitive de f s'annulant en $+\infty$ correspond au cas où $Constante = 0$:

$$\int f(x)\,dx = \ln\left(\frac{x(x+2)^3}{(x+1)^3(x+3)}\right).$$

2 Calcul de somme

Le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ s'écrit

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} f(k) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{3}{k+1} + \frac{3}{k+2} - \frac{1}{k+3} \right).$$

1re méthode.

Découpons la somme en quatre autres sommes. À l'aide de changements d'indices, on arrive à

$$\begin{aligned} u_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - 3\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} + 3\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+3} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - 3\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} + 3\sum_{k=3}^{n+2} \frac{1}{k} - \sum_{k=4}^{n+3} \frac{1}{k}. \end{aligned}$$

2 • ***Calcul de somme***

Posons $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. On peut réécrire u_n selon

$$\begin{aligned} u_n &= S_n - 3\left(S_n + \frac{1}{n+1} - 1\right) + 3\left(S_n + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} - 1 - \frac{1}{2}\right) \\ &\quad -\left(S_n + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) \\ &= \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{n+1} - \frac{2}{n+2} + \frac{1}{n+3}\right). \end{aligned}$$

Après calculs, on obtient

$$u_n = \frac{1}{3} - \frac{2}{(n+1)(n+2)(n+3)}.$$

Enfin, on trouve la limite

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \sum_{k=1}^{\infty} f(k) = \frac{1}{3}.$$

2 • ***Calcul de somme***

2e méthode.

En écrivant simplement $3 = 1+2 = 2+1$ (!), on débouche sur des sommes télescopiques :

$$\begin{aligned}
u_n &= \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{1}{k} - \left(\frac{1}{k+1} + \frac{2}{k+1}\right) + \left(\frac{2}{k+2} + \frac{1}{k+2}\right) - \frac{1}{k+3}\right] \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left[\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) - 2\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right) + \left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+3}\right)\right] \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) - 2\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right) + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+3}\right) \\
&= \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) - 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{n+3}\right) \\
&= \frac{1}{3} - \frac{2}{(n+1)(n+2)(n+3)}.
\end{aligned}$$

2 • ***Calcul de somme***

2e méthode (variante).

En écrivant simplement $3 = 1 + 2 = 2 + 1$ (!), on débouche sur une somme télescopique :

$$\begin{aligned}
u_n &= \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{1}{k} - \left(\frac{2}{k+1} + \frac{1}{k+1}\right) + \left(\frac{1}{k+2} + \frac{2}{k+2}\right) - \frac{1}{k+3}\right] \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left[\left(\frac{1}{k} - \frac{2}{k+1} + \frac{1}{k+2}\right) - \left(\frac{1}{k+1} - \frac{2}{k+2} + \frac{1}{k+3}\right)\right] \\
&= \left(1 - \frac{2}{2} + \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{n+1} - \frac{2}{n+2} + \frac{1}{n+3}\right) \\
&= \frac{1}{3} - \frac{2}{(n+1)(n+2)(n+3)}.
\end{aligned}$$

3 • ***Décomposition en éléments simples***

La fraction f admet $p+1$ pôles réels simples $0, -1, -2, \ldots, -p$. Sa décomposition en éléments simples est de la forme

$$f(x) = \frac{a_0}{x} + \frac{a_1}{x+1} + \frac{a_2}{x+2} + \cdots + \frac{a_p}{x+p} = \sum_{i=0}^{p} \frac{a_i}{x+i}.$$

Les coefficients a_i $(0 \leqslant i \leqslant p)$ se calculent selon

$$\begin{aligned}
a_i &= \lim_{x \to -i} (x+i) f(x) \\
&= \lim_{x \to -i} \frac{p!}{[x(x+1)(x+2)\ldots(x+i-1)][(x+i+1)\ldots(x+p)]} \\
&= \frac{p!}{[(-i)(-i+1)(-i+2)\ldots(-2)(-1)] \times [1 \times 2 \times \cdots \times (-i+p)]} \\
&= (-1)^i \frac{p!}{[i(i-1)(i-2) \times \cdots \times 2 \times 1] \times [1 \times 2 \times \cdots \times (p-i)]} \\
&= (-1)^i \frac{p!}{i!(p-i)!} = (-1)^i \binom{p}{i}.
\end{aligned}$$

❸ • *Calcul de primitives*

Partant de la décomposition $f(x) = \displaystyle\sum_{i=0}^{p} \frac{a_i}{x+i}$ avec $a_i = (-1)^i \binom{p}{i}$, on peut calculer facilement les primitives de f sur $]0, +\infty[$:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{p} a_i \ln(x+i) + Constante = \ln\Big(G(x)\Big) + Constante$$

où l'on a posé $G(x) = \displaystyle\prod_{i=0}^{p} (x+i)^{a_i}$. Réécrivons $G(x)$ selon

$$\begin{aligned} G(x) &= x^{a_0}(x+1)^{a_1}(x+2)^{a_2}(x+3)^{a_3}\dots(x+p)^{a_p} \\ &= \frac{x^{\binom{p}{0}}(x+2)^{\binom{p}{2}}(x+4)^{\binom{p}{4}}\dots(x+q)^{\binom{p}{q}}}{(x+1)^{\binom{p}{1}}(x+3)^{\binom{p}{3}}(x+5)^{\binom{p}{5}}\dots(x+r)^{\binom{p}{r}}} \end{aligned}$$

où $q = 2E(\frac{p}{2})$ et $r = 2E(\frac{p-1}{2}) + 1$.
(Si p est pair, $q=p$ et $r=p-1$; si p est impair, $q=p-1$ et $r=p$.)

3 • ***Détermination de la primitive nulle en l'infini***

La fonction G est une fraction rationnelle de degré $d=\sum_{i=0}^{p} a_i=\sum_{i=0}^{p}(-1)^i\binom{p}{i}$. D'après la formule du binôme de Newton, on voit que cette somme est nulle (elle vaut $(1-1)^p$).

De plus, $G(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x^d=1$, c'est-à-dire $\lim_{x\to+\infty} G(x)=1$ puis $\lim_{x\to+\infty} \ln\big(G(x)\big)=0$.

Donc la primitive de f s'annulant en $+\infty$ correspond au cas où $Constante=0$:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x=\ln\big(G(x)\big).$$

4 • ***Calcul de somme***

Le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ s'écrit

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} f(k) = f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(n) = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=0}^{p}\frac{a_i}{k+i}\right).$$

1re méthode. En intervertissant les ordres de sommation et en effectuant un changement d'indices, on trouve

$$\begin{aligned}
u_n &= \sum_{i=0}^{p} a_i\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+i}\right) = \sum_{i=0}^{p} a_i\left(\sum_{k=i+1}^{i+n}\frac{1}{k}\right)\\
&= a_0\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} + \sum_{i=1}^{p} a_i\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} + \sum_{k=n+1}^{n+i}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{i}\frac{1}{k}\right)\\
&= \left(\sum_{i=0}^{p} a_i\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right) + \left(\sum_{i=1}^{p} a_i\right)\left(\sum_{k=n+1}^{n+i}\frac{1}{k}\right) - \left(\sum_{i=1}^{p} a_i\right)\left(\sum_{k=1}^{i}\frac{1}{k}\right).
\end{aligned}$$

4 • ***Calcul de somme***

Rappelant que $\sum_{i=0}^{p} a_i = 0$, en intervertissant les sommes, on obtient

$$u_n = \sum_{k=n+1}^{n+p} \left(\sum_{i=k-n}^{p} a_i \right) \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{p} \left(\sum_{i=k}^{p} a_i \right) \frac{1}{k}.$$

Posons $b_k = \sum_{i=k}^{p} a_i \; {\scriptstyle (1\leqslant k\leqslant p)}$. À l'aide de changements d'indices, le terme u_n s'exprime selon

$$u_n = \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{b_{k-n}}{k} - \sum_{k=1}^{p} \frac{b_k}{k} = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{b_{k+1}}{k+n+1} - \sum_{k=0}^{p-1} \frac{b_{k+1}}{k+1}.$$

4 • ***Calcul de somme***

À l'aide de la formule du triangle de Pascal et d'une somme télescopique, on calcule b_k :

$$b_k = \sum_{i=k}^{p}(-1)^i\binom{p}{i} = (-1)^p + \sum_{i=k}^{p-1}(-1)^i\left[\binom{p-1}{i-1}+\binom{p-1}{i}\right]$$
$$= (-1)^p + \sum_{i=k}^{p-1}\left[(-1)^i\binom{p-1}{i} - (-1)^{i-1}\binom{p-1}{i-1}\right]$$
$$= (-1)^p + (-1)^{p-1} - (-1)^{k-1}\binom{p-1}{k-1} = (-1)^k\binom{p-1}{k-1}.$$

On obtient ainsi l'expression de u_n suivante :

$$u_n = \sum_{k=0}^{p-1}(-1)^k\binom{p-1}{k}\frac{1}{k+1} - \sum_{k=0}^{p-1}(-1)^k\binom{p-1}{k}\frac{1}{k+n+1}.$$

4 **_Calcul de somme_**

Rappelons alors la décomposition $f(x) = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \binom{p}{i} \frac{1}{x+i}$.

On remarque que u_n peut s'exprimer à l'aide de la fonction déduite de f en remplaçant p par $p-1$. Posons à cet effet

$$g(x) = \frac{(p-1)!}{x(x+1)(x+2)\dots(x+p-1)} = \sum_{i=0}^{p-1} (-1)^i \binom{p-1}{i} \frac{1}{x+i}.$$

Notons au passage que $g(1) = \frac{1}{p}$. On a $u_n = g(1) - g(n+1)$, soit encore

$$u_n = \frac{1}{p} - \frac{(p-1)!}{(n+1)(n+2)\dots(n+p)}.$$

Enfin, on obtient la limite

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \sum_{k=1}^{\infty} f(k) = \frac{1}{p}.$$

Exercice n° 20

4 • ***Calcul de somme***

2^e méthode. Posons $b'_i = (-1)^i \binom{p-1}{i}_{(0 \leqslant i \leqslant p-1)}$. À l'aide de la formule du triangle de Pascal, on décompose a_i selon

$$a_i = (-1)^i \binom{p}{i} = (-1)^i \left[\binom{p-1}{i-1} + \binom{p-1}{i} \right] = b'_i - b'_{i-1} \quad {\scriptstyle (1 \leqslant i \leqslant p-1)}.$$

On calcule alors u_n comme suit :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=0}^{p} \frac{a_i}{k+i} \right) = \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{1}{k} + \sum_{i=1}^{p-1} \frac{b'_i - b'_{i-1}}{k+i} + \frac{(-1)^p}{k+p} \right]$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left[\left(\frac{1}{k} + \sum_{i=1}^{p-1} \frac{b'_i}{k+i} \right) - \left(\sum_{i=1}^{p-1} \frac{b'_{i-1}}{k+i} + \frac{(-1)^{p-1}}{k+p} \right) \right]$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left[\left(\sum_{i=0}^{p-1} \frac{b'_i}{k+i} \right) - \left(\sum_{i=0}^{p-1} \frac{b'_i}{k+i+1} \right) \right].$$

4 ### *Calcul de somme*

Enfin, en invoquant la décomposition

$$g(x) = \sum_{i=0}^{p-1} (-1)^i \binom{p-1}{i} \frac{1}{x+i} = \sum_{i=0}^{p-1} \frac{b_i'}{x+i},$$

on voit que u_n se calcule à l'aide d'une somme télescopique :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \big(g(k) - g(k+1) \big) = g(1) - g(n+1)$$

soit encore

$$u_n = \frac{1}{p} - \frac{(p-1)!}{(n+1)(n+2)\dots(n+p)}.$$

Exercice 21 (Trois intégrales abéliennes)

1. Soit
$$f(x) = \sqrt{(x-1)(5-x)}$$
Calculer les primitives de f à l'aide du changement de variable $x = 2\sin(t) + 3$.

2. Soit
$$g(x) = \sqrt{(x-1)(x-5)}$$
Calculer les primitives de g à l'aide du changement de variable
$$x = \begin{cases} 2\,\mathrm{ch}(t) + 3 & \text{si } x \geqslant 1 \\ -2\,\mathrm{ch}(t) + 3 & \text{si } x \leqslant 5 \end{cases}.$$

3. Soit
$$h(x) = \frac{x}{(x^2+2x+8)^{3/2}}$$
Calculer les primitives de h à l'aide du changement de variable $x = \sqrt{7}\,\mathrm{sh}(t) - 1$.

Exercice n° 21

1. - ***Ensemble de définition***

   L'ensemble de définition de f est $[1,5]$.

   La correspondance $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \mapsto 2\sin(t)+3 \in [1,5]$ est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$. On peut donc utiliser le théorème du changement de variable.

   - ***Changement de variable***

   Posons $x = 2\sin(t)+3$.

   On a $(x-1)(5-x) = -x^2+6x-5 = 4-(x-3)^2 = 4\cos^2(t)$ puis $\sqrt{(x-1)(5-x)} = 2|\cos(t)| = 2\cos(t)$ (puisque $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$) et $\mathrm{d}x = 2\cos(t)\,\mathrm{d}t$.

   Notons également que

   $$t = \arcsin\left(\frac{x-3}{2}\right), \quad \cos(t) = \frac{1}{2}\sqrt{(x-1)(5-x)}, \quad \sin(t) = \frac{1}{2}(x-3).$$

Exercice n° 21

1. - ***Calcul des primitives***

  On a alors

$$\begin{aligned}
\int f(x)\,\mathrm{d}x &= \int 4\cos^2(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int \Big(2\cos(2t) + 2\Big)\,\mathrm{d}t \\
&= \sin(2t) + 2t + Cste \\
&= 2\sin(t)\cos(t) + 2t + Cste \\
&= \frac{1}{2}(x-3)\sqrt{(x-1)(5-x)} + 2\arcsin\left(\frac{x-3}{2}\right) + Cste.
\end{aligned}$$

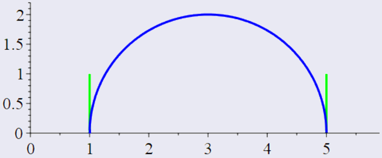
  - ***Calcul d'une intégrale définie***

  On a

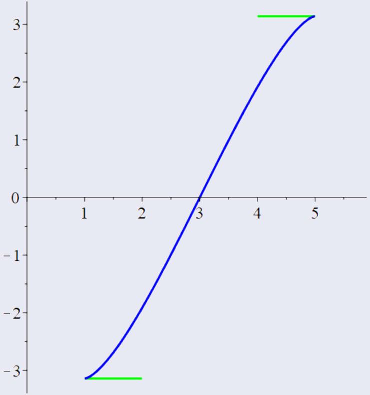
$$\int_1^5 f(x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}(x-3)\sqrt{(x-1)(5-x)} + 2\arcsin\left(\frac{x-3}{2}\right)\right]_1^5 = 2\pi.$$

Exercice nº 21

Tracés



$$x \mapsto \sqrt{(x-1)(5-x)}$$



$$x \mapsto \tfrac{1}{2}(x-3)\sqrt{(x-1)(5-x)} + 2\arcsin\left(\frac{x-3}{2}\right)$$

2

- ***Ensemble de définition***

  L'ensemble de définition de g est $]-\infty, 1] \cup [5, +\infty[$. On calcule des primitives de g séparément sur les intervalles $]-\infty, 1]$ et $[5, +\infty[$.

  Les correspondances $t \in [0, +\infty[\mapsto 2\operatorname{ch}(t) + 3 \in [5, +\infty[$ et $t \in [0, +\infty[\mapsto -2\operatorname{ch}(t) + 3 \in]-\infty, 1]$ sont des bijections de classe $\mathcal{C}^1$. On peut donc utiliser le théorème du changement de variable.

- ***Changement de variable sur $[5, +\infty[$***

  Posons $x = 2\operatorname{ch}(t) + 3$.

  On a $(x-1)(x-5) = x^2 - 6x + 5 = (x-3)^2 - 4 = 4\operatorname{sh}^2(t)$ puis $\sqrt{(x-1)(x-5)} = 2\operatorname{sh}(t)$ (puisque $t \in [0, +\infty[$) et $\mathrm{d}x = 2\operatorname{ch}(t)\,\mathrm{d}t$.

  Notons également que

  $$t = \operatorname{argch}\left(\frac{x-3}{2}\right), \quad \operatorname{ch}(t) = \frac{1}{2}(x-3), \quad \operatorname{sh}(t) = \frac{1}{2}\sqrt{(x-1)(x-5)}.$$

  Rappelons que $\operatorname{argch}(u) = \ln\left(u + \sqrt{u^2 - 1}\right)$ pour tout $u \in [1, +\infty[$.

2. • ***Calcul des primitives sur*** $\boldsymbol{[5, +\infty[}$

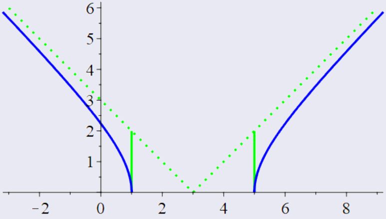
$$\begin{aligned}
\int g(x)\,\mathrm{d}x &= \int 4\,\mathrm{sh}^2(t)\,\mathrm{d}t = \int \Big(2\,\mathrm{ch}(2t) - 2\Big)\,\mathrm{d}t \\
&= \mathrm{sh}(2t) - 2t + Cste = 2\,\mathrm{sh}(t)\,\mathrm{ch}(t) - 2t + Cste \\
&= \frac{1}{2}(x-3)\sqrt{(x-1)(x-5)} - 2\,\mathrm{argch}\left(\frac{x-3}{2}\right) + Cste \\
&= \frac{1}{2}(x-3)\sqrt{(x-1)(x-5)} \\
&\quad - 2\ln\left(x - 3 + \sqrt{(x-1)(x-5)}\right) + Cste.
\end{aligned}$$

• ***Calcul des primitives sur*** $\boldsymbol{]-\infty, 1]}$

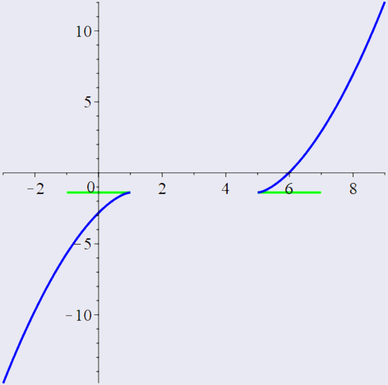
Posons $x = -2\,\mathrm{ch}(t) + 3$. Des calculs similaires conduisent à

$$\begin{aligned}
\int g(x)\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}(x-3)\sqrt{(x-1)(x-5)} \\
&\quad + 2\ln\left(3 - x + \sqrt{(x-1)(x-5)}\right) + Cste.
\end{aligned}$$

Tracés



$$x \mapsto \sqrt{(x-1)(x-5)}$$



$$x \mapsto \frac{1}{2}(x-3)\sqrt{(x-1)(x-5)} - 2\ln\left|x-3+\sqrt{(x-1)(x-5)}\right|$$

3 • ***Ensemble de définition***
L'ensemble de définition de h est $\mathbb{R}$.

La correspondance $t \in \mathbb{R} \mapsto \sqrt{7}\,\mathrm{sh}(t) - 1 \in \mathbb{R}$ est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$. On peut donc utiliser le théorème du changement de variable.

• ***Changement de variable***
Posons $x = \sqrt{7}\,\mathrm{sh}(t) - 1$.

On a $x^2 + 2x + 8 = (x+1)^2 + 7 = 7\,\mathrm{ch}^2(t)$
puis $(x^2 + 2x + 8)^{3/2} = 7\sqrt{7}\,\mathrm{ch}^3(t)$ et $\mathrm{d}x = \sqrt{7}\,\mathrm{ch}(t)\,\mathrm{d}t$.

Notons également que réciproquement $t = \mathrm{argsh}\left(\dfrac{x+1}{\sqrt{7}}\right)$ et

$$\mathrm{ch}(t) = \frac{1}{\sqrt{7}}\sqrt{x^2+2x+8} \qquad \mathrm{sh}(t) = \frac{1}{\sqrt{7}}(x+1)$$
$$\mathrm{th}(t) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+8}}$$

3. • ***Calcul des primitives***

On a alors

$$\int h(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sqrt{7}\,\mathrm{sh}(t)-1}{7\,\mathrm{ch}^2(t)}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{7}}\int \frac{\mathrm{sh}(t)}{\mathrm{ch}^2(t)}\,\mathrm{d}t - \frac{1}{7}\int \frac{1}{\mathrm{ch}^2(t)}\,\mathrm{d}t$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{7}}\frac{1}{\mathrm{ch}(t)} - \frac{1}{7}\,\mathrm{th}(t) + Cste$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{x^2+2x+8}} - \frac{1}{7}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+8}} + Cste$$

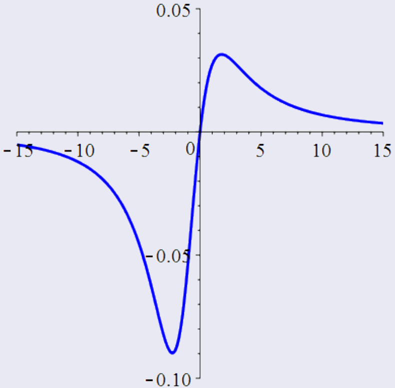
$$= -\frac{1}{7}\frac{x+8}{\sqrt{x^2+2x+8}} + Cste.$$

• ***Calcul d'une intégrale définie***

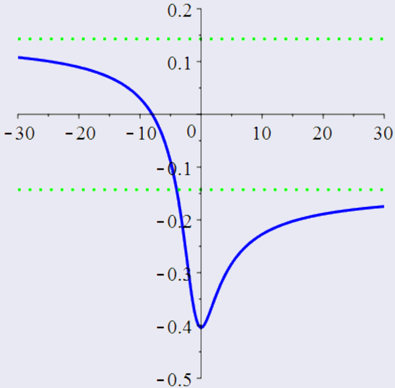
On a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\substack{A\to-\infty\\ B\to+\infty}} \int_A^B h(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\substack{A\to-\infty\\ B\to+\infty}} \left[-\frac{1}{7}\frac{x+8}{\sqrt{x^2+2x+8}}\right]_A^B = -\frac{2}{7}.$$

Tracés



$$x \mapsto \frac{x}{(x^2+2x+8)^{3/2}}$$



$$x \mapsto -\frac{x+8}{7\sqrt{x^2+2x+8}}$$